Exercice 1

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 3 + 2i - 1 + 3i$
2) $z_2 = (1 + i)^2$
3) $z_3 = 5 + i - (2 + 4i)$
4) $z_4 = (3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})$
5) $z_5 = 12 - 3i - 4 - 5 + 8i$
6) $z_6 = (2 - 5i)^2$
7) $z_7 = (1 + 2i)(4 + 3i)$
8) $z_8 = (1 + i)(2 - 3i)(1 + i)$
9) $z_9 = (3 - i)(2 + 7i)$
10) $z_{10} = (2 + i)^2(1 - 2i)$

1) $z_1 = 3+2i-1+3i$
$= 2+5i$

2) $z_2 = (1+i)^2$
$= 1-1+2i$
$= 2i$

3) $z_3 = 5+i-(2+4i)$
$= 5+i-2-4i$
$= 3-3i$

4) $z_4 = (3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})$
$= 3^2 - (i\sqrt{5})^2$
$= 9+5$
$= 14$

5) $z_5 = 12-3i-4-5+8i$
$= 3+5i$

6) $z_6 = (2-5i)^2$
$= 2^2 - 2\cdot 5i - 25$
$= -21-10i$

7) $z_7 = (1+2i)(4+3i)$
$= 4+3i+8i-6$
$= -2+11i$

8) $z_8 = (1+i)(2-3i)(1+i)$
$= (1+i)^2(2-3i)$
$= (1+2i-1)(2-3i)$
$= 6+4i$

9) $z_9 = (3-i)(2+7i)$
$= 6+21i-2i+7$
$= 13+19i$

10) $z_{10} = (2+i)^2(1-2i)$
$= (4+4i-1)(1-2i)$
$= (3+4i)(1-2i)$
$= 3-6i+4i+8$
$= 11-2i$

Exercice 2

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = \frac{-1}{2-3i}$
2) $z_2 = \frac{-4+3i}{5-4i}$
3) $z_3 = \frac{-1}{1-i} + \frac{3}{1+i}$

1) $z_1 = \dfrac{-1}{2-3i}\cdot\dfrac{2+3i}{2+3i}$

$= \dfrac{-2-3i}{2^2+3^2}$

$= -\dfrac{2}{13}-\dfrac{3}{13}i$

2) $z_2 = \dfrac{-4+3i}{5-4i}\cdot\dfrac{5+4i}{5+4i}$

$= \dfrac{-20-16i+15i-12}{5^2+4^2}$

$= -\dfrac{32}{41}-\dfrac{1}{41}i$

3) $z_3 = \dfrac{-1}{1-i}+\dfrac{3}{1+i}$

$= \dfrac{-1-i}{2}+\dfrac{3-3i}{2}$

$= \dfrac{2-4i}{2}$

$= 1-2i$

Exercice 3

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = -4i+3$
2) $z_2 = \frac{4-6i}{3+2i}$
3) $z_3 = \frac{3-6i}{3+i}+\frac{4}{3-i}$
4) $z_4 = \frac{1}{2-i\sqrt{3}}$
5) $z_5 = \frac{5+15i}{1+2i}$
6) $z_6 = \left(\frac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right)$
7) $z_7 = \frac{1}{4-3i}$
8) $z_8 = \frac{1+2i}{1-2i}$

1) $z_1 = 3-4i$

2) $z_2 = \dfrac{4-6i}{3+2i}\cdot\dfrac{3-2i}{3-2i}$

$= \dfrac{\cancel{12}-8i-18i-\cancel{12}}{3^2+2^2}$

$= \dfrac{-26}{13}i$

$= 2i$

3) $z_3 = \dfrac{3-6i}{3+i}+\dfrac{4}{3-i}$

$= \dfrac{(3-6i)(3-i)}{3^2+1^2}+\dfrac{4(3+i)}{3^2+1^2}$

$= \dfrac{9-3i-18i-6}{10}+\dfrac{12+4i}{10}$

$= \dfrac{15-17i}{10}$

$= \dfrac{3}{2}-\dfrac{17}{10}i$

4) $z_4 = \dfrac{1}{2-i\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2+i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$

$= \dfrac{2+i\sqrt{3}}{4+3}$

$= \dfrac{2}{7}+\dfrac{\sqrt{3}}{7}i$

5) $z_5 = \dfrac{5+15i}{1+2i}\cdot\dfrac{1-2i}{1-2i}$

$= \dfrac{\cancelto{1}{5}+\cancelto{3}{15}i-\cancelto{2}{10}i+\cancelto{6}{30}}{\cancelto{1}{5}}$

$= 7+i$

6) $z_6 = \dfrac{4-6i}{2-3i}\cdot\dfrac{1+3i}{3+2i}$

$= \dfrac{2\cancel{(2-3i)}}{\cancel{2-3i}}\cdot\dfrac{1+3i}{3+2i}$

$= \dfrac{2+6i}{3+2i}\cdot\dfrac{3-2i}{3-2i}$

$= \dfrac{6-4i+18i+12}{3^2+2^2}$

$$= \frac{18+14i}{13}$$

$$= \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i$$

7) $z_7 = \frac{1}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i}$

$$= \frac{4+3i}{4^2+3^2}$$

$$= \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$$

8) $z_8 = \frac{1+2i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i}$

$$= \frac{(1+2i)^2}{1^2+2^2}$$

$$= \frac{1+4i-4}{5}$$

$$= -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

Exercice 4

Déterminer la forme algébrique du conjugué $\bar{z}$ des nombres complexes suivants :

1) $z = -(1-i)$
2) $z = \frac{1}{i-1}$
3) $z = \frac{3-i}{1+i}$
4) $z = \frac{2i+1}{i+2} + \frac{1-2i}{2-i}$

1) $z = -1+i$

$\bar{z} = -1-i$

2) $z = \frac{1}{i-1} \cdot \frac{-i-1}{-i+1}$

$$= \frac{-i-1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$\bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

3) $z = \frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}$

$$= \frac{3-3i-i-1}{2}$$

$$= 1-2i$$

$\bar{z} = 1+2i$

4) $z_4 = \frac{2i+1}{i+2} + \frac{1-2i}{2-i}$

$$= \frac{(2i+1)(2-i)}{1+2^2} + \frac{(1-2i)(2+i)}{2^2+1}$$

$$= \frac{\cancel{4i}+2+2\cancel{-i}+2\cancel{+i}\cancel{-4i}+2}{5}$$

$$= \frac{8}{5}$$

$\bar{z} = \frac{8}{5}$

Exercice 5

Soit z un nombre complexe. Pour chaque nombre complexe Z suivant, exprimer $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$.

1) $Z = -4 - iz$
2) $Z = (3iz - 2)^2$
3) $Z = (3i + 5)(3 - 2iz)$
4) $Z = \frac{5+iz}{z-3i}$

1) $\overline{Z} = \overline{-4 - iz}$

$= -4 + i\overline{z}$

2) $\overline{Z} = \overline{(3iz-2)^2}$

$= \left(\overline{3iz-2}\right)^2$

$= (3i\overline{z}-2)^2$

3) $\overline{Z} = \overline{(3i+5)(3-2iz)}$

$= (\overline{3i}+5)(3-\overline{2iz})$

$= (5-3i)(3+2i\overline{z})$

4) $\overline{Z} = \overline{\dfrac{5+iz}{z-3i}}$

$= \dfrac{\overline{5+iz}}{\overline{z-3i}}$

$= \dfrac{5-i\overline{z}}{\overline{z}+3i}$

Exercice 6

1) On note $Z = (z+i)(z-1)$. En posant $z = x + yi$, x et y réels, exprimer Z sous forme algébrique.
2) On note $Z = \frac{z+1}{z-1}$, avec $z \neq 1$. En posant $z = x + yi$, x et y réels, exprimer Z sous forme algébrique.

1) $Z = (z+i)(z-1)$

$= (x+yi+i)(x+yi-1)$

$= x^2 + xyi - x + xyi - y^2 - yi + xi - y + i$

$= x^2 - y^2 - x - y + (2xy + x - y + 1)i$

2) $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$

$= \dfrac{x+yi+1}{x-1+yi} \cdot \dfrac{x-1-yi}{x-1-yi}$

$= \dfrac{x^2 \cancel{-x} \cancel{-xyi} \cancel{+xyi} - yi + y^2 \cancel{+x} - 1 - yi}{(x-1)^2 - y^2}$

$= \dfrac{x^2 - y^2 - 1 - 2yi}{(x-1)^2 - y^2}$

$$= \frac{x^2-y^2-1}{(x-1)^2-y^2} - \frac{2y}{(x-1)^2-y}\, i$$

Exercice 7

Soit $z = x + yi$, x et y réels. À tout nombre complexe z, on associe $Z = 2\bar{z} - 2 + 6i$. Calculer en fonction de x et de y, la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

$$Z = 2\bar{z} - 2 + 6i$$
$$= 2(x - yi) - 2 + 6i$$
$$= 2x - 2yi - 2 + 6i$$
$$= 2x - 2 + (6-2y)i$$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Re}(Z) &= 2x-2 \\ \operatorname{Im}(Z) &= 6-2y \end{aligned}}$$

Exercice 8

Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = -4 - 4i$
2) $z_2 = \frac{6}{7}$
3) $z_3 = 2\sqrt{3} - 2i$
4) $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{5}i$
5) $z_5 = -\frac{12}{5}i$
6) $z_6 = \frac{2}{1-i}$
7) $z_7 = -7$
8) $z_8 = \frac{1-\sqrt{3}i}{-5+5i}$

1) $z_1 = -4 - 4i$

$$|z_1| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\cos(\theta_1) = \frac{a}{r} = \frac{-\cancel{4}}{\cancel{4}\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\theta_1) = \frac{b}{r} = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\rightarrow$ 3ième quadrant

Donc $\theta_1 = -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$ et $z_1 = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$$= 4\sqrt{2}\left[\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

2) $z_2 = \frac{6}{7}$

$$z_2 = \frac{6}{7}\left[\cos(0) + i\sin(0)\right]$$

3) $z_3 = 2\sqrt{3} - 2i$

$$|z_3| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$= 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\theta_2) = \frac{a}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_2) = \frac{a}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{4ième quadrant}$$

Donc $\theta_2 = -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$ et $z_2 = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$= 4\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

4) $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{5}i$

$$|z_4| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} \quad \underline{= \frac{2}{5}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\theta_4) = \frac{a}{r} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{5}}}{\frac{2}{\cancel{5}}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_4) = \frac{b}{r} = \frac{\frac{1}{\cancel{5}}}{\frac{2}{\cancel{5}}} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{2ième quadrant}$$

Donc $\theta_4 = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ et $z_4 = \frac{2}{5}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$$= \frac{2}{5}\ \text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

5) $z_5 = -\frac{12}{5}i$

$$= \frac{12}{5} \cdot (-i)$$

$$= \frac{12}{5}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{12}{5}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

6) $$z_6 = \frac{2}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} + \overset{1}{\cancel{2}}i}{{}_{1}\cancel{2}}$$

$$= 1+i$$

$$|z_6| = \sqrt{1^2+1^2}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\theta_6) &= \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_6) &= \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} 1^{\text{ième}} \text{ quadrant}$$

Donc $\theta_6 = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ et $z_6 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$= \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

7) $$z_7 = -7$$

$$= 7 \cdot (-1)$$

$$= 7\left[\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right]$$

$$= 7\operatorname{cis}(\pi)$$

8) $$z_8 = \frac{1-\sqrt{3}i}{-5+5i}$$

- <u>Numérateur</u>: $z_N = 1-\sqrt{3}\,i$

$$|z_N| = \sqrt{1^2+3}$$

$$= 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\theta_N) &= \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta_N) &= \frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} 4^{\text{ième}} \text{ quadrant}$$

D'où $\theta_N = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ et $z_N = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

• <u>Denominateur</u> :

$$z_D = -5 + 5i$$
$$= 5(-1+i)$$
$$= 5\sqrt{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

Donc : $|z_8| = \frac{|z_N|}{|z_D|} = \frac{2}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$

et $\arg(z_8) = \arg(z_N) - \arg(z_D)$

$$= -\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}$$
$$= -\frac{13\pi}{12} \pmod{2\pi}$$
$$= \frac{11}{12}\pi \pmod{2\pi}$$

Finalement $z_8 = \frac{\sqrt{2}}{5}\cdot\left[\cos\left(\frac{11}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{12}\pi\right)\right]$

$$= \frac{\sqrt{2}}{5}\cdot \operatorname{cis}\left(\frac{11}{12}\pi\right)$$

<u>Exercice 9</u>

Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$
2) $z_2 = 4 - 4i$
3) $z_3 = -2i$
4) $z_4 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
5) $z_5 = -\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}$
6) $z_6 = \frac{4}{1-i}$
7) $z_7 = 3 + 3i$
8) $z_8 = -\frac{4}{3}i$
9) $z_9 = -100$
10) $z_{10} = -1 - \sqrt{3}i$
11) $z_{11} = \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{2}$
12) $z_{12} = \sqrt{3} + i$
13) $z_{13} = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$
14) $z_{14} = (1+i)^{10}$
15) $z_{15} = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^{-11}$
16) $z_{16} = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{1020}$
17) $z_{17} = \frac{1-i}{5i}$
18) $z_{18} = \frac{-2}{\sqrt{3}-i}$

1) $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$

$= 2(1 + \sqrt{3}i)$

$= 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= 4 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

2) $z_2 = 4 - 4i$

$= 4(1 - i)$

$= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 4\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

3) $z_3 = -2i$

$= 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

4) $z_4 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 2 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

5) $z_5 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= \frac{1}{2} \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

6) $z_6 = \frac{4}{1-i}$

$= \frac{4+4i}{2}$

$= 2(1+i)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 2\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

7) $z_7 = 3 + 3i$

$= 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 3\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

8) $z_8 = -\frac{4}{8}i$

$= \frac{4}{8} \cdot (-i)$

$= \frac{4}{8} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

9) $z_9 = -100$

$= 100 \cdot (-1)$

$= 100 \cdot \operatorname{cis}(\pi)$

10) $z_{10} = -1 - \sqrt{3}i$

$= 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

11) $z_{11} = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}i}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}(-1 - 1i)$

$= \frac{\sqrt{6}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= \frac{\sqrt{6}}{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

12) $z_{12} = \sqrt{3} + i$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

13)

$z_{13} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$

$= \frac{\cancel{\sqrt{3}} + i + 3i - \cancel{\sqrt{3}}}{3 + 1^2}$

$= i$

$= \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

14)

$z_{14} = (1+i)^{10}$

$= \sqrt{2}^{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}$

$= \sqrt{2}^{10} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} \cdot 10\right)$

$= 2^5 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

15)

$z_{15} = (-1 + \sqrt{3}i)^{-11}$

$= 2^{-11}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-11}$

$= \left(2^{11} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3} \cdot 11\right)\right)^{-1}$

$= \frac{1}{2048} \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

16)

$z_{16} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^{1020}$

$= \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1020\right)$

$= \operatorname{cis}(0)$

17)

$z_{17} = \frac{1-i}{5i}$

$= \frac{5i + 5}{5^2}$

$= \frac{1}{5}(-1 - i)$

$= \frac{\sqrt{2}}{5} \operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

18)

$z_{18} = \frac{-2}{\sqrt{3} - i}$

$$= \frac{-2\sqrt{3}-2i}{3+1^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$= cis\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

Exercice 10

Soit θ un nombre réel. Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = -\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$
2) $z_2 = 2[cos(\theta) - i \cdot sin(\theta)]$
3) $z_3 = -\frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i \cdot sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]$
4) $z_4 = 7\left[-sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \cdot cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$
5) $z_5 = -3\left[cos\left(\frac{\pi}{5}\right) i + sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$
6) $z_6 = 2[sin(\theta) - i \cdot cos(\theta)]$

1) $z_1 = -\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

2) $z_2 = 2\left[\cos(\theta) - i\sin(\theta)\right]$

$= 2\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$

3) $z_3 = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right]$

4) $z_4 = 7\left[-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$

$= 7\left[\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right]$

5) $z_5 = -3\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$

$= 5\left[-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$

$= 5\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{10}\right)\right]$

6) $z_6 = 2\left[\sin(\theta) - i\cos(\theta)\right]$

$= 2\left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

Exercice 11

Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = -2\left[cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$
2) $z_2 = 5i\left[cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \cdot sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]$
3) $z_3 = -6i\left[cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \cdot sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right]$
4) $z_4 = 4i\left[cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + i \cdot sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)\right]^{10}$
5) $z_5 = -3i\left[cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) i + sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]^7$

1) $z_1 = -2\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$

$= 2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$

$= 2\left[\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right]$

2) $z_2 = 5i\left[\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]$

$= 5\left[i\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]$

$= 5\left[\cos\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$

$= 5\left[\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{10}\right)\right]$

3) $z_3 = -6i\left[\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right]$

$= 6\left[-i\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right]$

$= 6\left[\cos\left(\frac{2\pi}{7} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7} - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

$= 6\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{14}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{14}\right)\right]$

4) $z_4 = 4i\left[\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)\right]^{10}$

$= 4i\left[\cos\left(\frac{30\pi}{11}\right) + i\sin\left(\frac{30\pi}{11}\right)\right]$

$= 4\left[i\cos\left(\frac{30\pi}{11}\right) - \sin\left(\frac{30\pi}{11}\right)\right]$

$= 4\left[\cos\left(\frac{30\pi}{11} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{30\pi}{11} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$

$= 4\left[\cos\left(\frac{27\pi}{22}\right) + i\sin\left(\frac{27\pi}{22}\right)\right]$

5) $z_5 = -3i\left[i\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]^7$

$= -3i\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}\right)\right]^7$

$= -3i\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^7$

$= 3\left[-i\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)\right]$

$= 3\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

$= 3\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

Exercice 12

On pose : $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{1}{5}i$; $z_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1+i)$; $z_3 = \frac{2-2i}{-3+\sqrt{3}i}$; $z_4 = (1-i)^3$ et $z_5 = i(-1-i)$

Pour chacun des nombres complexes précédents, calculer le module et l'argument dans l'intervalle $[0; 2\pi[$.

- $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{1}{5}i$ $\qquad |z_1| = \sqrt{\frac{3}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{2}{5}$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\theta_1) &= \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_1) &= \frac{b}{r} = \frac{-\frac{1}{\cancel{5}}}{\frac{2}{\cancel{5}}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \text{4}^{\text{ième}} \text{ quadrant}$$

Donc : $\theta_1 = -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} = \frac{11}{6}\pi \pmod{2\pi}$

- $z_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1+i)$

Soit $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z' = -1+i$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= \text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$|z_2| = |z| \cdot |z'| = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$

et : $\arg(z_2) = \arg(z) + \arg(z')$

$= -\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}$

$= \frac{5\pi}{12} \pmod{2\pi}$

- $z_3 = \dfrac{2-2i}{-3+\sqrt{3}i}$

Soit : $z = 2-2i$ et $z' = -3+\sqrt{3}i$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 2\sqrt{3} \cdot \text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$= 2\sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$|z_3| = \dfrac{|z|}{|z'|} = \dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

et $\arg(z_3) = \arg(z) - \arg(z')$

$= -\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}$

$= -\frac{13\pi}{12} \pmod{2\pi}$

$= \frac{11}{12}\pi \pmod{2\pi}$

- $z_4 = (1-i)^3$

Soit : $z = 1-i$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$$
$$= \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

D'où $|z_4| = \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}$

et $\arg(z_4) = 3 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)$
$$= -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$$
$$= \frac{5\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

- $z_5 = i(-1-i)$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$$
$$= \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$$

Exercice 13

Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = (1-i)^2$; $z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ et $z_3 = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$

- $z_1 = (1-i)^2$
$$= (1-i)(1-i)$$
$$= 1-i-i-1$$
$$= -2i$$
$$= 2(0-i)$$
$$= 2\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

- $z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

Soit : $z = 1-i\sqrt{3}$
$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$
$$= 2\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

et $z' = 1+i$
$$= \sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

d'où $z_2 = \frac{2}{\sqrt{2}}\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$
$$= \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$$

- $z_3 = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$

Soit $z = (\sqrt{3} + i)$ et soit $z' = 1 + i$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ $= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $= \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$z^9 = 2^9 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ $z'^{12} = \sqrt{2}^{12} \operatorname{cis}\left(\frac{12\pi}{4}\right)$

$= 2^6 \operatorname{cis}(\pi)$

D'où $z_3 = \frac{z^9}{z'^{12}}$

$= \frac{2^9}{2^6} \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right)$

$= 2^3 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 14

Soient $z = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}$ et $z' = 1 - i$.

1) Déterminer les modules de z et z'.
2) Déterminer un argument de z et z'.
3) Déterminer le module et un argument de $\frac{z}{z'}$.

1) $|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$ et $|z'| = \sqrt{1^2 + 1^2}$

$= \sqrt{2}$ $= \sqrt{2}$

2) $z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$ et $z' = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$\Rightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$ $\Rightarrow \arg(z') = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$

3) $\frac{|z|}{|z'|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

Exercice 15

Soient $z = 1 + i$ et $z' = -1 + \sqrt{3}i$

1) Déterminer les modules de z et z'.
2) Déterminer un argument de z et z'.
3) Déterminer le module et un argument de $\frac{z}{z'}$.
4) Déterminer la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$.
5) En déduire la valeur exacte de $cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ et $sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$.

$z = 1+i$ et $z' = -1+\sqrt{3}i$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ $= 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

1) $|z| = \sqrt{2}$ et $|z'| = 2$

2) $\arg(z) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ et $\arg(z') = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$

3) $\frac{|z|}{|z'|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}$$

$$= -\frac{5\pi}{12} \pmod{2\pi}$$

4) $\frac{z}{z'} = \frac{1+i}{-1+\sqrt{3}i} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}i}{-1-\sqrt{3}i}$

$$= \frac{-1-\sqrt{3}i-i+\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}}{4} + \frac{-1-\sqrt{3}}{4}i$$

5) $\frac{z}{z'} = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} + \frac{-1-\sqrt{3}}{4}i$ et $\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{\cancel{4}_2} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice 16

Soit $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1) Déterminer la forme algébrique de z^2.
2) Déterminer le module et un argument de z^2.
3) En déduire la forme trigonométrique de z^2.

1) $z^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$

$= 2+\sqrt{3} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot i\sqrt{2-\sqrt{3}} - \left(2-\sqrt{3}\right)$

$= \cancel{2} + \sqrt{3} + 2i\sqrt{4-3} - \cancel{2} + \sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3} + 2i$

2) $|z^2| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{a}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{b}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \ 1^{\text{ière}} \text{ quadrant}$$

Donc $\arg(z^2) = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$

3) $z^2 = 4\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 17

Écrire les nombres complexes suivants en notation exponentielle.

1) $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$

2) $z_2 = \left(1 + \sqrt{3}i\right)^4$

3) $z_3 = 2\left[cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i \cdot sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$

4) $z_4 = -3i\left[sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i \cdot cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

1) $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$

$|z_1| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 6^2} = 4\sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{r} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

Donc $z_1 = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) $z_2 = (1 + \sqrt{3}i)^4$

Soit : $z = 1 + \sqrt{3}i$

$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc $\Rightarrow z_2 = 16 e^{i\frac{4\pi}{3}}$

3) $z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$

$= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$

$= 2 e^{-i\frac{\pi}{5}}$

4) $z_4 = -3i\left[\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$= -3\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$= e^{i\pi} \cdot 3 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$= 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Exercice 18

Écrire les nombres complexes suivants en notation exponentielle.

1) $z_1 = -5 - 5i$
2) $z_2 = -\sqrt{3} + i$
3) $z_3 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$
4) $z_4 = (-1 - \sqrt{3}i)(3 - \sqrt{3}i)$
5) $z_5 = \frac{-1+i}{5\sqrt{3}-5i}$
6) $z_6 = -3i\left[cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi}{11}\right)\right]$
7) $z_7 = -e^{-i\frac{\pi}{2}}$
8) $z_8 = \frac{\pi}{i} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
9) $z_9 = -\sqrt{5}e^{-i\frac{\pi}{5}}$
10) $z_{10} = \frac{4}{3e^{i\frac{\pi}{8}}}$
11) $z_{11} = \frac{i}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{11}}}$
12) $z_{12} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{4}}}{12ie^{i\frac{\pi}{12}}}$

1) $z_1 = -5-5i$
$= 5(-1-i)$
$= 5\sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

2) $z_2 = -\sqrt{3} + i$
$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$
$= 2\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$

3) $z_3 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$
$= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$
$= 3\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$

4) $z_4 = (1-\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)$
$= \left[2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right]\left[2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right)\right]$
$= 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \cdot 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$
$= 4\sqrt{3}\, e^{-\frac{5\pi}{6}}$

5) $z_5 = \frac{-1+i}{5\sqrt{3}-5i}$
$= \frac{\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}$
$= \frac{\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}}{10 \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}}$
$= \frac{\sqrt{2}}{10}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$

6) $z_6 = -3i\left[\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)\right]$
$= 3 \cdot (-i) \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)\right]$
$= 3 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{11}}$
$= 3\, e^{-i\frac{9\pi}{22}}$

7) $z_7 = -e^{-i\frac{\pi}{2}}$
$= e^{i\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$
$= e^{i\frac{\pi}{2}}$

8) $z_8 = \frac{\pi}{i}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
$= \pi\, e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
$= \pi \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

9) $z_9 = -\sqrt{5}\, e^{-i\frac{\pi}{5}}$

$= e^{i\pi}\cdot\sqrt{5}\cdot e^{-i\frac{\pi}{5}}$

$= \sqrt{5}\, e^{i\frac{4\pi}{5}}$

10) $z_{10} = \dfrac{4}{3e^{i\frac{\pi}{8}}}$

$= \frac{4}{3}\, e^{-i\frac{\pi}{8}}$

11) $z_{11} = \dfrac{i}{\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{11}}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\, i \cdot e^{i\frac{\pi}{11}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{11}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{13\pi}{22}}$

12) $z_{12} = \dfrac{-e^{i\frac{\pi}{4}}}{12\, i\, e^{i\frac{\pi}{12}}}$

$= \frac{1}{12}\cdot(+i)\cdot\left(+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\cdot e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$= \frac{1}{12}\, e^{i\frac{\pi}{2}}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{1}{12}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 19

On pose : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $z_4 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Écrire les nombres complexes suivants en notation exponentielle, si possible :

1) $z_1 \cdot z_2$
2) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$
3) z_2^5
4) $\frac{z_1}{z_2}$
5) $z_4 \cdot \frac{z_2}{z_3}$
6) $z_3^6 \cdot z_4^4$
7) $z_1 + z_2$

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_4 = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}$

1) $z_1\cdot z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$= e^{-i\frac{\pi}{12}}$

2) $z_1\cdot z_2\cdot z_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\cdot\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

3) $(z_2)^5 = \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^5 = e^{-i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

4) $\frac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= e^{i\frac{7\pi}{12}}$

5) $z_4\cdot\frac{z_2}{z_3} = \frac{1}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}\cdot\sqrt{2}\, e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-i\frac{10\pi}{6}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

$6)\ (z_3)^6 \cdot (z_4)^4 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^4$

$= 8 \cdot e^{i5\pi} \cdot \frac{1}{16} e^{-i2\pi}$

$= \frac{1}{2} e^{i\pi}$

$7)\ z_1 + z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 20

Dans chacun des cas suivants, écrire z en notation exponentielle et en déduire la forme algébrique de $\bar{z}$ et de $\frac{1}{z}$:

1) $z = \frac{5}{1-i\sqrt{3}}$
2) $z = 4ie^{i\frac{\pi}{4}}$
3) $z = -10e^{i\frac{\pi}{3}}$
4) $z = (1+i)^3$

$1)\ z = \frac{5}{1-i\sqrt{3}}$

$= 5 \frac{1}{1-i\sqrt{3}}$

$= 5 \cdot \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{5}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\bar{z} = \frac{5}{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$= \frac{5}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{4} i$

$\frac{1}{z} = \frac{2}{5} e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{\cancel{2}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{2}}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} i\right)$

$= \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$2)\ z = 4ie^{i\frac{\pi}{4}}$

$= 4\, e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$

$= 4\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$\bar{z} = 4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

$= 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

$= -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} i$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi}{4}}$

$= \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

$= -\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8} i$

$3)\ z = -10e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= e^{i\pi} \cdot 10 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= 10 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\bar{z} = 10e^{-i\frac{4\pi}{3}}$

$= 10 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$= -5 + 5\sqrt{3}\, i$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{10} \cdot e^{-i\frac{4\pi}{3}}$

$= \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$= -\frac{1}{20} + \frac{\sqrt{3}}{20} i$

$$4)\ z = (1+i)^3$$
$$= \sqrt{2}^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3$$
$$= 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\bar{z} = 2\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$
$$= \cancel{2}\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}i\right)$$
$$= -2-2i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$$
$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

Exercice 21

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique.

1) $z_1 = \left[cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\cdot sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^4$

2) $z_2 = \left[\sqrt{2}\left(-cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\cdot sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\right]^{15}$

3) $z_3 = (-5+5i)\left[-sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\cdot cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]^{21}$

4) $z_4 = (1-i)^{2020}\left(3-\sqrt{3}i\right)^{2022}$

$$1)\ z_1 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^4$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2)\ z_2 = \left\{\sqrt{2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]\right\}^{15}$$
$$= \sqrt{2}^{15}\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)\right]^{15}$$
$$= 2^7\sqrt{2}\left[\cos\left(15\cdot\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(15\cdot\frac{4\pi}{5}\right)\right]$$
$$= 128\sqrt{2}\cdot\left[\cos(0) + i\sin(0)\right]$$

$$3)\ z_3 = (-5+5i)\left[-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]^{21}$$
$$= 5\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{14}\right)\right]^{21}$$
$$= 5\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathrm{cis}\left(\frac{9\pi}{\cancel{14}_{2}}\cdot\cancel{21}^{3}\right)$$
$$= 5\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 5\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$4)\ z_4 = (1-i)^{2020}\left(3-\sqrt{3}i\right)^{2022}$$
$$= \left[(1-i)^2\right]^{1010}\left(3-\sqrt{3}i\right)^{2022}$$
$$= (-2i)^{1010}\cdot\sqrt{3}^{2022}\left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right]^{2022}$$
$$= 2^{1010}\cdot i^{1010}\cdot 3^{1011}\left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{2022}$$
$$= 2^{1010}\cdot i^{2}\cdot 3^{1011}\cdot 2^{2022}\cdot e^{-i\frac{2022\pi}{6}}$$
$$= -2^{3032}\cdot 3^{1011}\cdot e^{-i337\pi}$$
$$= 2^{3032}\cdot 3^{1011}\cdot e^{i\pi}\cdot e^{-i337\pi}$$
$$= 2^{3032}\cdot 3^{1011}\cdot e^{i2\pi}$$
$$= 2^{3032}\cdot 3^{1011}\cdot\left[\cos(0) + i\sin(0)\right]$$

Exercice 22

Calculer et mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

1) $z_1 = \frac{i-3}{1-2i} + \frac{1-2i}{1+i}$

2) $z_2 = \frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^4}$

3) $z_3 = \frac{\left(2-2\sqrt{3}i\right)^5}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}i\right)^6}$

1) $z_1 = \frac{i-3}{1-2i} + \frac{1-2i}{1+i}$

$= \frac{(i-3)(1+2i)}{1+4} + \frac{(1-2i)(1-i)}{1+1}$

$= \frac{i-2-3-6i}{5} + \frac{1-i-2i+2}{2}$

$= \frac{-5-7i}{5} + \frac{3-3i}{2}$

$= -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$

2) $z_2 = \frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^4}$

$= \frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^6}{\left(2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4}$

$= e^{i4\pi} \cdot \frac{1}{16} \cdot e^{i\pi}$

$= \frac{1}{16} e^{i\pi}$

$= -\frac{1}{16}$

3) $z_3 = \frac{\left(2-2\sqrt{3}i\right)^5}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}i\right)^6}$

$= \frac{2^5 \cancel{\left(1-\sqrt{3}i\right)^5}}{\sqrt{2}^6 \left(1-\sqrt{3}i\right)^{\cancel{6}\,1}}$

$= \frac{2^5}{2^3} \frac{1}{1-\sqrt{3}i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$

$= 8\,\frac{1+\sqrt{3}i}{4}$

$= 2+2\sqrt{3}i$

Exercice 23

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = -4\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ et $z_2 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

1) Déterminer la forme algébrique de z_1 et de $z_1 \cdot z_2$.
2) Écrire z_1, z_2 et $z_1 \cdot z_2$ en notation exponentielle.
3) En déduire la valeur exacte de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

1) $z_1 = -4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ et $z_2 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$$= -4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= -2 - 2\sqrt{3}i$$

Donc : $z_1 \cdot z_2 = (-2 - 2\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$
$$= 1 - i + \sqrt{3} + \sqrt{3}i$$
$$= 1 + \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i$$

2) $z_1 = e^{i\pi} \cdot 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$
$$= 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$$
$$= 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

et $z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$
$$= 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$$

3)
$$\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}} \\ z_1 \cdot z_2 = 1 + \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}} = 1 + \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i$$

$$\Leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}i$$

$$\Leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}i$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Exercice 24

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $z_2 = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}i$.

1) Écrire z_1 et z_2 en notation exponentielle.

2) Déterminer la forme algébrique et une forme exponentielle de $\frac{{z_1}^5}{{z_2}^2}$.

3) En déduire la valeur exacte de $cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

1) $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_2 = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}i$

$= \sqrt{6}\left(\frac{3\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{2}}} + i\right)$

$= \sqrt{6}\left(\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} + i\right)$

$= 2\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= 2\sqrt{6}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$

2) $\frac{(z_1)^5}{(z_2)^2} = \frac{2^5\, e^{i\frac{15\pi}{4}}}{(2\sqrt{6})^2\, e^{i\frac{\cancel{2}^{1}\pi}{\cancel{6}_{3}}}}$ ⊛

$= \frac{2^{\cancel{5}\,3}}{2^{\cancel{2}}_{0}\cdot 6} \cdot e^{i\frac{41\pi}{12}}$

$= \frac{4}{3}\, e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

3) D'après ⊛ : $\frac{(z_1)^5}{(z_2)^2} = \frac{2^5 \cdot e^{i\frac{15\pi}{4}}}{(2\sqrt{6})^2\, e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

$= \frac{4}{3}\, \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$= \frac{4}{3}\, \frac{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}i}{\frac{1}{\cancel{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}i}$

$= \frac{4}{3}\, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$

$= \frac{\cancel{4}}{3}\, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i - \sqrt{6} - \sqrt{6}i}{\cancel{4}}$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3} i$$

$$\frac{4}{\cancel{3}} e^{-i\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\cancel{3}} + \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\cancel{3}} i$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{-i\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} i$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Exercice 25

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \frac{i}{1-i}$ et $z_2 = 6 + 2\sqrt{3}i$.

1) Déterminer la forme algébrique de z_1 et de $z_1 \cdot z_2$.
2) Écrire z_1, z_2 et $z_1 \cdot z_2$ sous forme exponentielle.
3) En déduire la valeur exacte de $cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

1) $z_1 = \frac{i}{1-i}$

$= \frac{i-1}{2}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

et $z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(6 + 2\sqrt{3}i\right)$

$= -3 - \sqrt{3}i + 3i - \sqrt{3}$

$= -3 - \sqrt{3} + \left(-\sqrt{3} + 3\right)i$

2) $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

et $z_2 = 6 + 2\sqrt{3}i$

$= 2\left(3 + \sqrt{3}i\right)$

$= 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$$= 4\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot \cancel{4}^{\,2}\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$= 2\sqrt{6}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

3) $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{6}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$ et $z_1 \cdot z_2 = 3 - \sqrt{3} + (-\sqrt{3} + 3)i$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{6}\, e^{i\frac{11\pi}{12}} = -3 - \sqrt{3} + (-\sqrt{3} + 3)i$$

$$\Leftrightarrow e^{i\frac{11\pi}{12}} = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} + \frac{-\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}\, i$$

$$= \frac{-\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\, i$$

$$= \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\, i$$

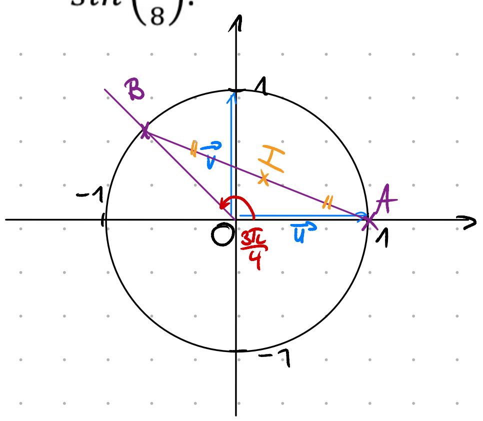
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Exercice 26

Les points A et B ont pour affixes respectives $a = 1$ et $b = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. I est le milieu du segment $[AB]$.

1) Réaliser une figure et préciser la nature du triangle OAB.
2) Trouver une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$, déterminer la forme algébrique de l'affixe I et en déduire que $OI = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.
3) Donner l'affixe de I sous forme exponentielle et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

1)



OAB est isocèle en O.

2) Comme $I = \text{mil}[AB]$ et OAB est un triangle isocèle en O, (OI) coupe l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OB})$ en deux angles de même amplitude.

D'où : $(\vec{u}; \overrightarrow{OB}) = 2 \cdot (\vec{u}; \overrightarrow{OI})$

$$\Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{OI}) = \frac{(\vec{u}; \overrightarrow{OB})}{2}$$

$$= \frac{\frac{3\pi}{4}}{2}$$

$$= \frac{3\pi}{8}$$

On a $b = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$= cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

D'où : $I = \frac{a+b}{2}$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i}{2}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} i$$

$$OI = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

3) $I = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\ e^{i\frac{3\pi}{8}}$

Or $I = \frac{2-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} i$

D'où $\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \Big| \cdot 2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\ \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} & \Big| \cdot 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2(2-\sqrt{2})}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(1^2+2\sqrt{2}+2)(2-\sqrt{2})}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6-3\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

Exercice 27

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \frac{3}{1-i} - \frac{2i}{1+i}$ et $z_2 = \frac{3\sqrt{3}+i}{2+i\sqrt{3}}$.

1) Écrire z_1, z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

2) En déduire la valeur exacte de $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

1)

$$z_1 = \frac{3}{1-i} - \frac{2i}{1+i}$$
$$= \frac{3(1+i)}{2} - \frac{2i(1-i)}{2}$$
$$= \frac{3+3i}{2} - \frac{2i+2}{2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = \frac{3\sqrt{3}+i}{2+i\sqrt{3}} \cdot \frac{2-i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{6\sqrt{3} - 9i + 2i + \sqrt{3}}{2^2+3}$$
$$= \frac{7\sqrt{3} - 7i}{7}$$
$$= \sqrt{3} - i$$
$$= 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{\sqrt{3}-i} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i + \frac{1}{2}i}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3}+1)i}{8}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{8} + \frac{\sqrt{3}+1}{8}i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} e^{\left(i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}-1}{8} + \frac{\sqrt{3}+1}{8}i$ et $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\cancel{4}\;1} e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\cancel{8}\;2} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cancel{8}\;2}i$$

$$\Leftrightarrow e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice 28

Soit $z = 1 + \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})$

1) Déterminer la forme algébrique de z^2.
2) Déterminer le module et un argument de z^2.
3) En déduire la forme trigonométrique de z.
4) En déduire la valeur exacte de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

1) $z^2 = \left[1 + \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i\right]^2$

$= \left[1 + \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i\right]\left[1 + \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i\right]$

$= \cancel{1} + \sqrt{3} - i + \cancel{\sqrt{3}i} + \sqrt{3} + \cancel{3} - \cancel{\sqrt{3}i} + 3i - i - \cancel{\sqrt{3}i} - \cancel{1} + \sqrt{3} + \cancel{\sqrt{3}i} + 3i + \sqrt{3} - \cancel{3}$

$= 4i + 4\sqrt{3}$

2) $|z^2| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8$

$z^2 = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$\left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$

3) $|z| = \sqrt{|z^2|} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\arg(z) = \frac{\arg(z^2)}{2}$$
$$= \frac{\pi}{6 \cdot 2} \pmod{2\pi}$$
$$= \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}$$

D'où $z = 2\sqrt{2}\, cis\left(\frac{\pi}{12}\right)$

4) $$\begin{cases} 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

<u>Exercice 29 (examen septembre 2013)</u>

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \sqrt{3} - i,\ z_2 = sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $z_3 = 2ie^{-i\frac{5\pi}{3}}$

1) Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle.
2) Déterminer la forme algébrique et une forme exponentielle de $= \frac{{z_3}^2}{z_2}$.
3) En déduire la valeur exacte de $cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ et $sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

1) $z_1 = \sqrt{3} - i$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$
$$= 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$z_3 = 2ie^{-i\frac{5\pi}{3}}$
$$= 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{5\pi}{3}}$$

$$= 2e^{-i\frac{7\pi}{6}}$$

$$= 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

2) $$\frac{(z_3)^2}{z_2} = \frac{4e^{i\frac{\cancel{10}^{5}\pi}{\cancel{6}_{3}}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$= 4e^{i\frac{5\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= 4e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$(z_3)^2 = 4e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

$$= 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2 - 2\sqrt{3}i$$

$$z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\frac{(z_3)^2}{z_2} = \frac{2-2\sqrt{3}i}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i} \cdot \frac{2}{2}$$

$$= \frac{4-4\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$$

$$= \frac{\cancel{4}\sqrt{2} + \cancel{4}\sqrt{2}i + \cancel{4}\sqrt{6} - \cancel{4}\sqrt{6}i}{\cancel{4}}$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{6} + (\sqrt{2} - \sqrt{6})i$$

3) $$4e^{-i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2} + \sqrt{6} + (\sqrt{2} - \sqrt{6})i$$

$$\Leftrightarrow e^{-i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Exercice 30 (examen septembre 2014)

On donne les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -\frac{4}{-1-i\sqrt{3}},\ z_2 = sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ et } z_3 = -2e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

1) Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle.
2) En déduire que le nombre $Z = \frac{(\overline{z_1})^5}{(z_2)^7}$ est imaginaire pur.
3) Exprimer $Z' = z_1 \cdot z_3$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
4) En déduire la valeur exacte de $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

1) $z_1 = -\frac{4}{1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$

$= \frac{\cancel{4}-\cancel{4}\sqrt{3}i}{\cancel{4}}$

$= 1-\sqrt{3}i$

$= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

$= e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\left(= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$

$z_3 = -2e^{i\frac{7\pi}{4}}$

$= e^{i\pi}2e^{i\frac{7\pi}{4}}$

$= 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2) $Z = \frac{(\overline{z_1})^5}{(z_2)^7}$

$= \frac{2^5 e^{i\frac{5\pi}{3}}}{e^{i\frac{7\pi}{6}}}$

$= 2^5 e^{i\frac{5\pi}{3}} \cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}$

$= 32e^{i\frac{\pi}{2}}$

$= 32i$

3) $z' = z_1 \cdot z_3$

$= 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} \cdot 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$= 4e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$z' = z_1 \cdot z_3$

$= (1-\sqrt{3}i)\left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)$

$= (1-\sqrt{3}i) \cdot \left[2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]$

$= (1-\sqrt{3}i)(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)$

$= -\sqrt{2}+\sqrt{2}i - \sqrt{6}i + \sqrt{6}$

$= \sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{2}+\sqrt{6})i$

4) $z_1 \cdot z_3 = 4e^{i\frac{5\pi}{12}}$ et $z_1 \cdot z_3 = \sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{2}+\sqrt{6})i$

$\Leftrightarrow 4e^{i\frac{5\pi}{12}} = \sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{6}+\sqrt{2})i$

$\Leftrightarrow e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice 31

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \frac{-3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}}{(1-i)^2}$ et $z_2 = \frac{i}{i\sqrt{3}-1}$.

1) Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
2) Écrire $Z = \frac{z_1 \cdot z_2}{i+\sqrt{3}}$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
3) En déduire la valeur exacte de $cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$ et $sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$.

1) $z_1 = \frac{-3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}}{(1-i)^2}$

$= \frac{-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i}{-2i} \cdot \frac{i}{i}$

$z_2 = \frac{i}{i\sqrt{3}-1}$

$= \frac{\sqrt{3}-i}{4}$

$$= \frac{-3\sqrt{2}i + 3\sqrt{2}}{2}$$

$$= 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 3\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

2) $Z = \dfrac{z_1 \cdot z_2}{i+\sqrt{3}}$

$$= \frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right)}{i+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\frac{3\sqrt{6}}{8} - \frac{3\sqrt{6}}{8}i - \frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{8}i}{i+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\frac{3}{8}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{6}i - \sqrt{2}i\right)}{i+\sqrt{3}} \cdot \frac{-i+\sqrt{3}}{-i+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3}{32}\left(-\sqrt{6}i + \sqrt{2}i - \sqrt{6} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{6} - 3\sqrt{2}i - \sqrt{6}i\right)$$

$$= \frac{3}{\cancel{32}_{16}}\left(-\cancel{2}\sqrt{6}i - \cancel{2}\sqrt{2}i - \cancel{2}\sqrt{6} + \cancel{2}\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{3}{16}\left[\sqrt{2} - \sqrt{6} + \left(-\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)i\right]$$

Soit : $z = i+\sqrt{3}$

$$= 2\left(\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$Z = \frac{z_1 \cdot z_2}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$= \frac{3e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$= \frac{3}{4}\, e^{\left(-i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{6} - i\frac{\pi}{6}\right)}$$

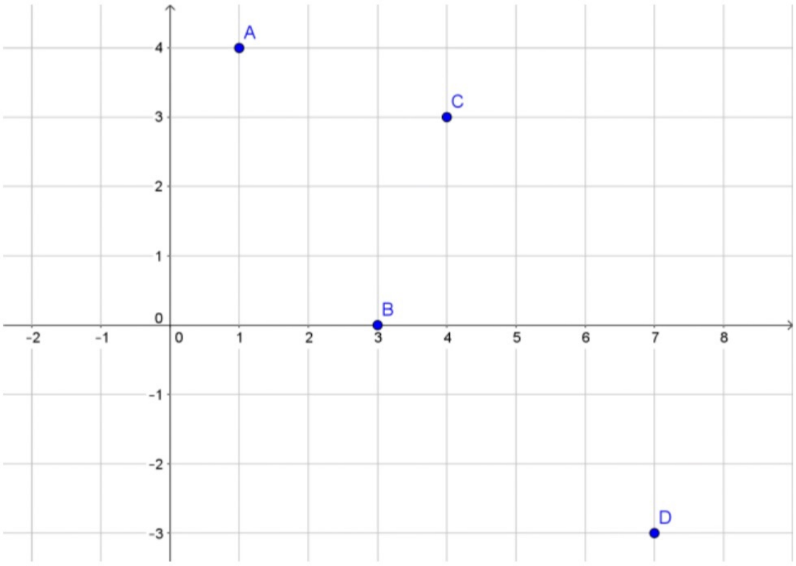
$= \frac{3}{4} e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

3) $\cancel{\frac{3}{4}} e^{-i\frac{7\pi}{12}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{16}_{4}} \left[\sqrt{2} - \sqrt{6} + \left(-\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)i\right]$

$\Leftrightarrow e^{-i\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

<u>Exercice 32</u>



1) En utilisant le graphique précédent, déterminer les affixes des points A, B, C et D puis celles des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2) Est-ce que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ? Justifier.
3) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

1) $A(1+4i)$; $B(3)$; $C(4+3i)$; $D(7-3i)$

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$	$z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C$
$= 3 - 1 - 4i$	$= 7 - 3i - 4 - 3i$
$= 2 - 4i$	$= 3 - 7i$
$\overrightarrow{AB}(2-4i)$	$\overrightarrow{CD}(3-7i)$

2) $(AB) \parallel (CD) \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaire

$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \mid z_{\overrightarrow{AB}} = k \cdot z_{\overrightarrow{CD}}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \mid 2-4i = k \cdot (3-6i)$$

$$\iff k = \frac{2}{3}$$

Donc $(AB) \parallel (CD)$

3) Il semble qu'il s'agit d'un triangle rectangle et isocèle en C.

Vérifions :

$z_{\overrightarrow{AB}} = 2-4i$

$AB = |z_{\overrightarrow{AB}}|$
$= \sqrt{2^2+4^2}$
$= \sqrt{20}$

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A$
$= 4+3i-1-4i$
$= 3-i$

$AC = |z_{\overrightarrow{AC}}|$
$= \sqrt{3^2+1}$
$= \sqrt{10}$

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B$
$= 4+3i-3$
$= 1+3i$

$BC = |z_{\overrightarrow{BC}}|$
$= \sqrt{1^2+3^2}$
$= \sqrt{10}$

ABC est isocèle en C, car $|z_{\overrightarrow{AC}}| = |z_{\overrightarrow{BC}}|$

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = 20 \\ AC^2 + BC^2 = 10 + 10 = 20 \end{array}\right) =$$

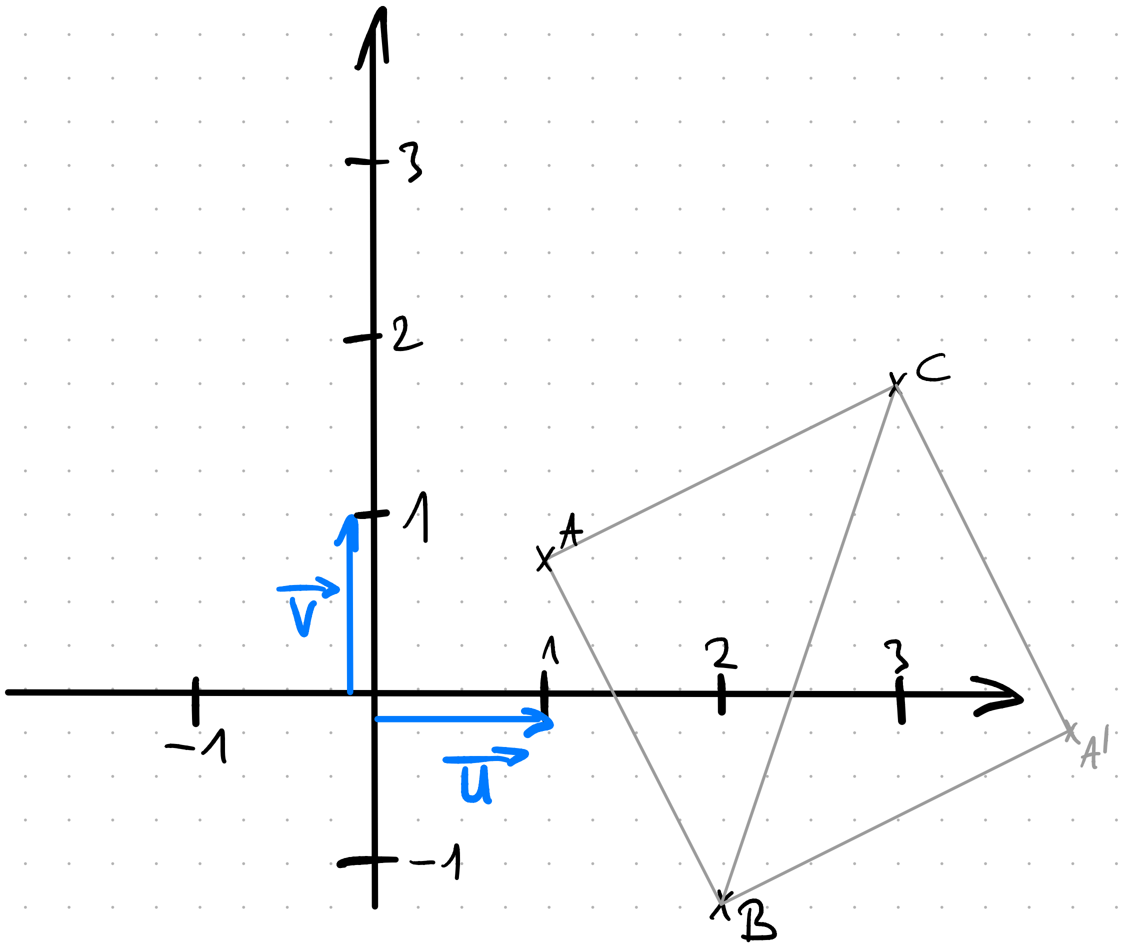
Par la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en C.

Exercice 33

On donne les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1 + \frac{3}{4}i$, $b = 2 - \frac{5}{4}i$ et $c = 3 + \frac{7}{4}i$.

1) Placer A, B et C.
2) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
3) Calculer l'affixe du point A', tel que le quadrilatère $ABA'C$ soit un carré.

1)



2) Il semble que ABC est rectangle et isocèle en A.

Vérifions :

$z_{\vec{AB}} = \quad -a$
$= 2 - \frac{5}{4}i - 1 - \frac{3}{4}i$
$= 1 - 2i$

$z_{\vec{BC}} = c - b$
$= 3 + \frac{7}{4}i - 2 + \frac{5}{4}i$
$= 1 + 3i$

$z_{\vec{AC}} = c - a$
$= 3 + \frac{7}{4}i - 1 - \frac{3}{4}i$
$= 2 + i$

$$\left.\begin{array}{l} |z_{\vec{BC}}|^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \\ |z_{\vec{AB}}|^2 + |z_{\vec{AC}}|^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 = 10 \end{array}\right) =$$

Par la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle et isocèle en A.

3) Soit : $a' = x+yi$ l'affixe de A'

Donc $z_{\overrightarrow{AC}} = z_{\overrightarrow{BA'}} \iff 2+i = a'-b$

$\iff 2+i = x+yi-2+\frac{5}{4}i$

$\iff 2+i = x-2+\left(y+\frac{5}{4}\right)i$

$\iff \begin{cases} 2 = x-2 \\ 1 = y+\frac{5}{4} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$

D'où $a = 4-\frac{1}{4}i$

Exercice 34

Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives $a = 2-2i$, $b = -1+7i$, $c = 4+2i$ et $d = -4-2i$. Ω est le point d'affixe $\omega = -1+2i$.

Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon 5.

A, B, C et D appartiennent à ce cercle

$\iff A\Omega = B\Omega = C\Omega = D\Omega = 5$

Vérifions :

$A\Omega = |\omega - a|$
$= |-1+2i-2+2i|$
$= |-3+4i|$
$= \sqrt{3^2+4^2}$
$= 5$

$B\Omega = |\omega - b|$
$= |\cancel{-1}+2i\cancel{+1}-7i|$
$= \sqrt{5^2}$
$= 5$

$C\Omega = |\omega - c|$
$= |-1+\cancel{2i}-4\cancel{-2i}|$
$= \sqrt{5^2}$
$= 5$

$D\Omega = |\omega - d| = |-1+2i+4+2i| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

Donc A, B, C et D appartiennent à ce cercle

Exercice 35

On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = -\sqrt{3} - i$, $z_C = 2i$ et $z_D = \sqrt{3} + 3i$.

1) Calculer le module et un argument pour les trois premières affixes. Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?
2) Placer A, B, C et D ~~à la règle et au compas~~ dans un repère orthonormé direct.
3) Quelle est la nature du quadrilatère $AOCD$? Justifier.
4) Déterminer l'affixe du point E de sorte que le quadrilatère $ODEB$ soit un parallélogramme. Justifier.

1) $|z_A| = \sqrt{3+1^2} = 2$

$z_A = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$\arg(z_A) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$

$|z_B| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = 2$

$z_B = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$\arg(z_B) = -\frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$

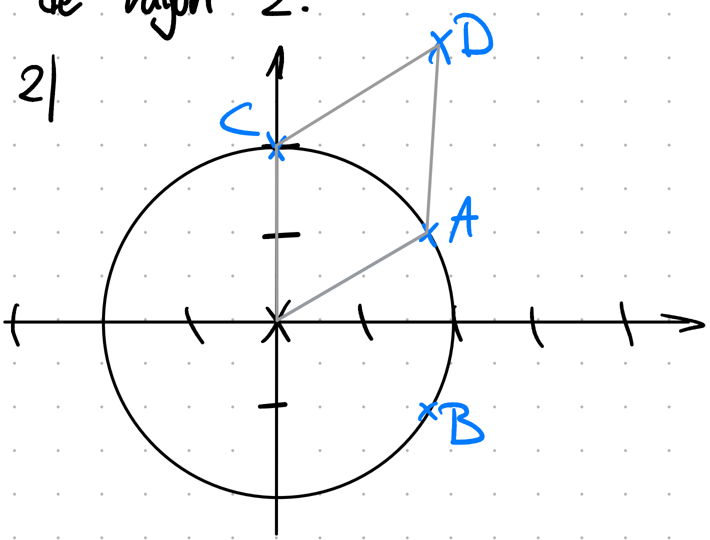
$|z_C| = \sqrt{2^2} = 2$

$z_C = 2\cdot(i)$

$\arg(z_C) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

Les point A, B et C se trouvent sur le cercle $O(0;0)$ et de rayon 2.

2)



$z_D = \sqrt{3} + 3i$

$= \sqrt{3}(1 + \sqrt{3}i)$

$= 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\Rightarrow \arg(z_D) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$

et $|z_D| = 2\sqrt{3}$

3) Il semble que $AOCD$ est un losange.

Donc $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$

et $z_{\overrightarrow{OC}} = 2i$

$$z_{\overrightarrow{AD}} = z_D - z_A$$
$$= \cancel{\sqrt{3}} + 3i - \cancel{\sqrt{3}} - i$$
$$= 2i \ (= z_{\overrightarrow{OC}})$$

En effet AOCD est un losange!

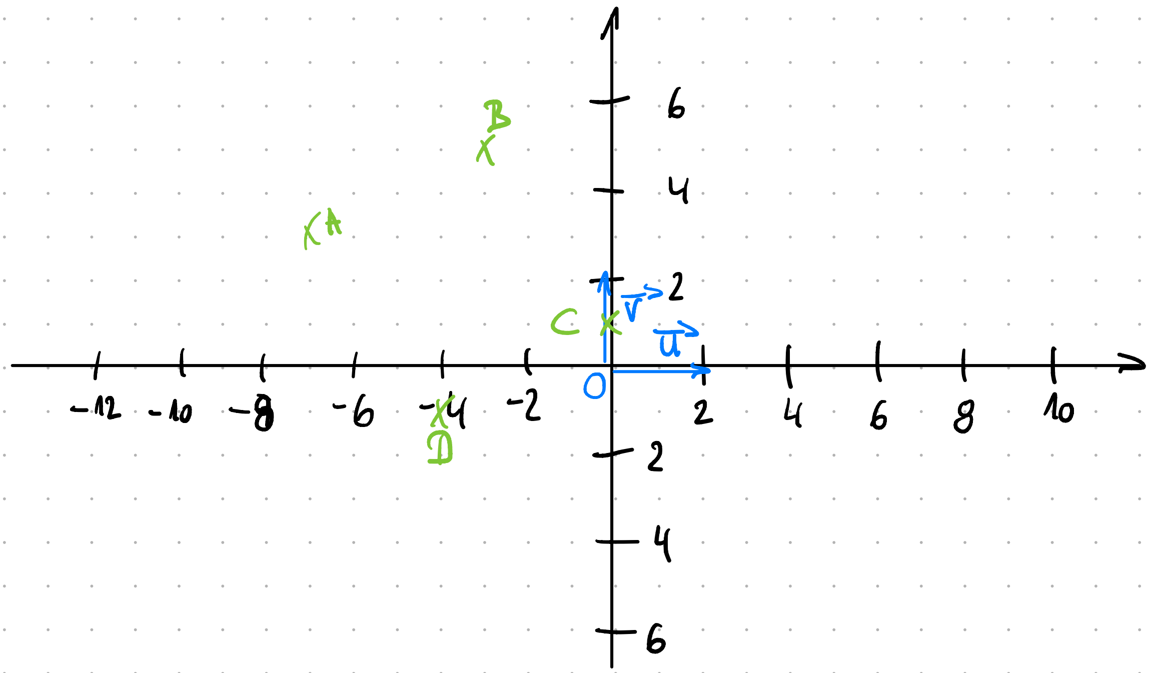
4) ODEB est un parallélogramme

$$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{OB}} = z_{\overrightarrow{DE}}$$
$$\Leftrightarrow z_B - z_O = z_E - z_D$$
$$\Leftrightarrow z_E = z_B - z_O + z_D$$
$$= \cancel{-\sqrt{3}} - i - 0 + \cancel{\sqrt{3}} + 3i$$
$$= 2i \ (= z_C)$$

Exercice 36

1) Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -7 + 3i$, $z_B = -3 + 5i$, $z_C = i$ et $z_D = -4 - i$ dans un repère orthonormé direct.
2) Est-ce que le quadrilatère $ABCD$ est un losange ? Justifier.
3) Est-ce que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme ? Justifier.

1)



2) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

$= -3 + 5i + 7 - 3i$

$= 4 + 2i$

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B$

$= i + 3 - 5i$

$= 3 - 4i$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + 2^2}$

$= \sqrt{20}$

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{25}$

$= 5 \quad (\neq AB)$

Donc ABCD n'est pas un losange.

3) $z_{\overrightarrow{AB}} = 4 + 2i$

$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D$

$= i + 4 + i$

$= 4 + 2i$

D'où $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$

Il suit que ABCD est un parallélogramme.

<u>Exercice 37 (examen juin 2017)</u>

On donne les points *A*, *B* et *C* d'affixes $z_A = \frac{-1}{-i-1}$, $z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_C = \frac{i-5}{-2i}$.

1) Écrire z_A, z_B et z_C sous forme algébrique.
2) Déterminer l'affixe du point *D* tel que *ABCD* soit un parallélogramme.

1) $z_A = \frac{-1}{-i-1} \cdot \frac{i-1}{i-1}$

$= \frac{-i+1}{2}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= 1 + \sqrt{3}\,i$

$$z_C = \frac{i-5}{-2i} \cdot \frac{2i}{2i}$$

$$= \frac{-2-10i}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

2) ABCD est un parallélogramme

$$\iff z_{\vec{AB}} = z_{\vec{DC}}$$

$$\iff 1-\sqrt{3}i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i - z_D$$

$$\iff 1-\sqrt{3}i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i - z_D$$

$$\iff \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)i = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i - z_D$$

$$\iff 1 + \left(3 - \sqrt{3}\right)i = -z_D$$

$$\iff z_D = -1 + \left(\sqrt{3} - 3\right)i$$

<u>Exercice 38 (examen juin 2015)</u>

On donne les points *A* et *B* d'affixes $z_A = \sqrt{3} \cdot ie^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = -\frac{4}{3}(\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot i)$.

1) Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.
2) Calculer l'affixe du point *C* tel que *ABOC* soit un parallélogramme.
3) Calculer l'affixe de *I*, centre du parallélogramme *ABOC*.

1)
$$z_A = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$= \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$z_B = -\frac{4}{3}\left(\sqrt{3} - \sqrt{3}i\right)$$

$$= -\frac{4\sqrt{3}}{3}(1-i)$$

$$= -\frac{4\sqrt{3}}{3}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$= -\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}i$$

2) ABOC est un parallélogramme.

$$\iff z_{\vec{BA}} = z_{\vec{OC}}$$

$$\iff \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = z_C$$

$$\iff z_C = \frac{11\sqrt{3}}{6} + \frac{9-8\sqrt{3}}{6}i$$

3) I est le millieu de la diagonale $[AO]$

$$\iff z_I = \frac{z_A + z_O}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$$

Exercice 39

1) Calculer $(1-i)^2$, $(1-i)^4$, $(1-i)^6$ et $(1-i)^8$.
2) Soit *n* un nombre entier naturel. On donne le point M_n d'affixe $z_n = (1-i)^n$. Pour quelles valeurs de *n*, le point M_n appartient-il à l'axe des abscisses ? Même question pour M_n appartenant à l'axe des ordonnées ?

1) $(1-i)^2 = 1^2 - 2i - 1$

$= -2i$

$(1-i)^4 = \left[(1-i)^2\right]^2$

$= (-2i)^2$

$= -4$

$(1-i)^6 = (1-i)^4(1-i)^2$

$= -4 \cdot (-2i)$

$= 8i$

$(1-i)^8 = (1-i)^4(1-i)^4$

$= -4 \cdot (-4)$

$= 16$

2) Un entier naturel n s'écrit sous la forme $4k$, ou $4k+1$, ou $4k+2$, ou $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

On a : $(1-i)^{4k} = \left[(1-i)^4\right]^k$

$= -4^k$ est un réel

$$(1-i)^{4k+1} = (1-i)^{4k}(1-i)$$

$$= (-4)^k(1-i) \text{ est un nombre complexe}$$

$$(1-i)^{4k+2} = (1-i)^{4k}(1-i)^2$$

$$= (-4)^k(-2i) \text{ est un imaginaire pur}$$

$$(1-i)^{4k+3} = (1-i)^{4k}(1-i)^3$$

$$= (-4)^{4k}(-2-2i) \text{ est un nombre complexe}$$

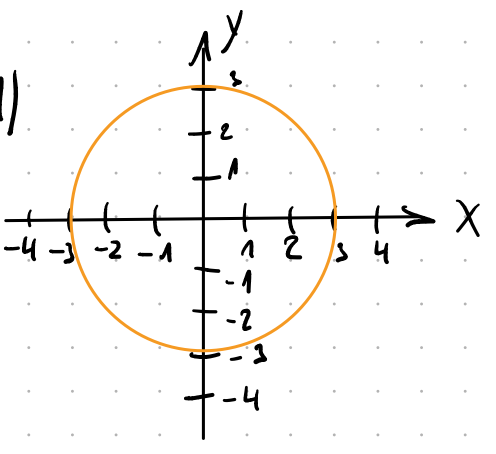
On déduit que le point M_n appartient à l'axe des abscisses si et seulement si n est un multiple de 4.
De plus, le point M_n appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si n est un multiple de 2, mais pas de 4.
(ou si $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$)

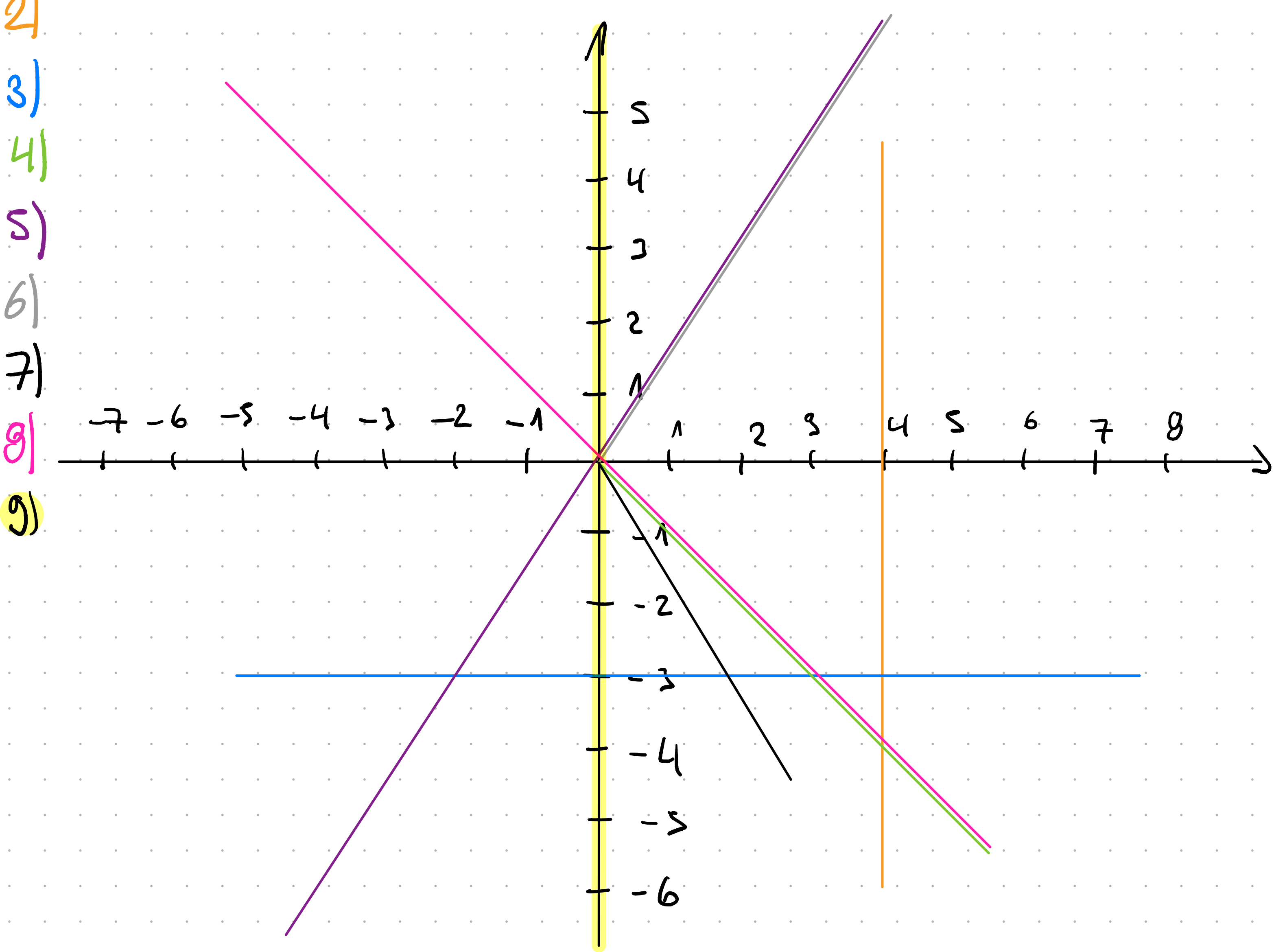
<u>Exercice 40</u>

Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée:

1) $|z| = 3$
2) $Re(z) = 4$
3) $Im(z) = -3$
4) $arg(z) = -\frac{\pi}{4} (mod\ 2\pi)$
5) $arg(z) = \frac{\pi}{3} (mod\ \pi)$
6) $arg(iz) = \frac{5\pi}{6} (mod\ 2\pi)$
7) $arg(i\bar{z}) = \frac{5\pi}{6} (mod\ 2\pi)$
8) $arg\left(\frac{-z}{-1-i}\right) = \frac{\pi}{2} (mod\ \pi)$
9) $arg\left(\frac{3-\sqrt{3}i}{iz}\right) = \frac{5\pi}{6} (mod\ \pi)$

1)





6) $\arg(iz) = \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$

$\iff \arg(i) + \arg(z) = \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$

$\iff \arg(z) = \frac{5\pi}{6} - \arg(i) \pmod{2\pi}$

$\iff \arg(z) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

$= \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$

7) $\arg(i\bar{z}) = \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$

$\iff \arg(i) + \arg(\bar{z}) = \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$

$\iff \arg(\bar{z}) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

$$\Leftrightarrow -\arg(z) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$
$$\Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

8) $\arg\left(\frac{-z}{-1-i}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$
$$\Leftrightarrow \arg(z) - \arg(1+i) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$
$$\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \arg(1+i) \pmod{\pi}$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$$
$$= \frac{3\pi}{4} \pmod{\pi}$$

9) $\arg\left(\frac{3-\sqrt{3}i}{iz}\right) = \frac{5\pi}{6} \pmod{\pi}$

$$\Leftrightarrow \arg(3-\sqrt{3}i) - \arg(iz) = \frac{5\pi}{6} \pmod{\pi}$$
$$\Leftrightarrow -\arg(iz) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \pmod{\pi}$$
$$\Leftrightarrow \arg(i) + \arg(z) = \pi \pmod{\pi}$$
$$\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

Exercice 41

M est le point d'affixe $z = x + iy$ avec *x*, *y* réels.

A tout point *M* d'affixe $z \neq 1$, on associe le point *M'* d'affixe $Z = \frac{5z-2}{z-1}$.

1) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de *Z* en fonction de *x* et *y*.
2) Démontrer que le point *M'* appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si le point *M* appartient à un cercle privé d'un point.

1) $Z = \frac{5z-2}{z-1}$

$$= \frac{5(x+yi)-2}{(x+yi)-1}$$

$$= \frac{5(x+yi)-2}{x-1+yi} \cdot \frac{x-1-yi}{x-1-yi}$$

$$= \frac{(5(x+yi)-2)(x-1-yi)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$= \frac{(5x+5yi-2)(x-1-yi)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$= \frac{5x^2-5x\cancel{-5xyi}\cancel{+5xyi}-5yi+5y^2-2x+2+2yi}{(x-1)^2+y^2}$$

$$= \frac{5x^2-7x+5y^2+2}{(x-1)^2+y^2} + \frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}\, i$$

$$Re(z) = \frac{5x^2-7x+5y^2+2}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Im(z) = \frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}\, i$$

2) $M' \in (Oy) \iff Re(z) = 0$

$$\iff 5x^2-7x+5y^2+2=0$$

$$\iff x^2-\frac{7}{5}x+y^2+\frac{2}{5}=0$$

$$\iff x^2-2\cdot\frac{7}{10}\cdot x+\left(\frac{7}{10}\right)^2+y^2 = -\frac{2}{5}+\left(\frac{7}{10}\right)^2$$

$$\iff \left(x-\frac{7}{10}\right)^2+(y-0)^2 = \left(\frac{3}{10}\right)^2$$

M appartient au cercle de centre $\left(\frac{7}{10};0\right)$ et de rayon $\frac{3}{10}$ privé du point $(1;0)$.

Exercice 42 (examen juin 2005)

M est le point d'affixe $z = x + iy$ avec x, y réels.

A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $Z = -(3 - \bar{z})(iz + 2)$.

1) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.
2) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M pour lesquels Z est un réel.
3) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M pour lesquels Z est un imaginaire pur.

1) $Z = -(3 - \bar{z})(iz + 2)$

$= -[3 - (x - yi)][i(x + yi) + 2]$

$= -(3 - x + yi)(xi - y + 2)$

$= (-3 + x - yi)(xi - y + 2)$

$= -3xi + 3y - 6 + x^2 i \cancel{- xy} + 2x \cancel{+ yx} - y^2 i - 2yi$

$= (-3x + x^2 - y^2 - 2y)i + (3y - 6 + 2x)$

$Re(Z) = 2x + 3y - 6 \qquad Im(Z) = x^2 + y^2 - 3x - 2y$

2) Z est un réel

$\iff Im(Z) = 0$

$\iff x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - 2y + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1$

$\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1) = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

D'où $\mathscr{E}$ est le cercle du centre $\left(\frac{3}{2} ; 1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$

3) Z est un imaginaire pur

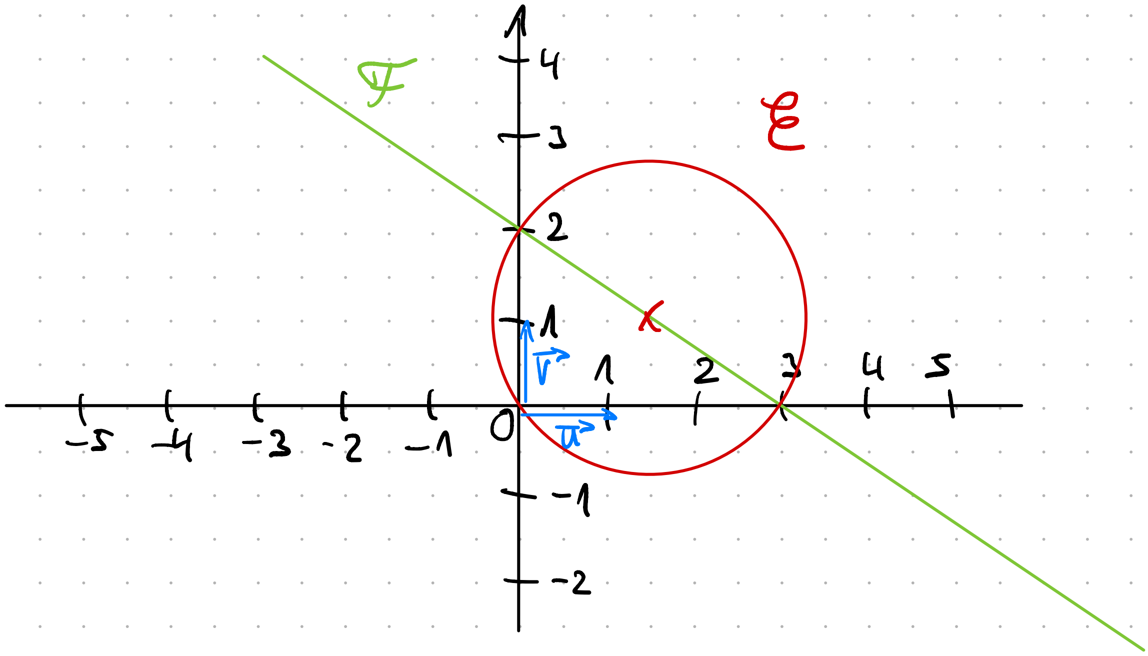
$\iff Re(Z) = 0$

$\iff 2x + 3y - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 3y = -2x + 6$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$$

D'où $\mathcal{F}$ est la droite d'équation $d \equiv y = -\frac{2}{3}x + 2$



Exercice 43

M est le point d'affixe $z = x + iy$ avec *x*, *y* réels.

A tout point *M* d'affixe $z \neq -2i$, on associe le point *M'* d'affixe $Z = \frac{z-3i}{z+2i}$.

1) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de *Z* en fonction de *x* et *y*.
2) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{E}$ des points *M* pour lesquels *Z* est un réel.
3) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{F}$ des points *M* pour lesquels *Z* est un imaginaire pur.

1) $Z = \dfrac{z-3i}{z+2i}$

$$= \frac{(x+yi)-3i}{(x+yi)+2i}$$

$$= \frac{x+yi-3i}{x+(y+2)i} \cdot \frac{x-yi-2i}{x-(y+2)i}$$

$$= \frac{x^2 \cancel{-xyi} - 2xi \cancel{+xyi} + y^2 + 2y - 3xi - 3y - 6}{x^2+(y+2)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-y-6}{x^2+(y+2)^2} + \frac{-5x}{x^2+(y+2)^2} i$$

$$Re(Z) = \frac{x^2+y^2-y-6}{x^2+(y+2)^2} \quad / \quad Im(Z) = -\frac{5x}{x^2+(y+2)^2}$$

2) Z est un réel

$$\iff Im(Z) = 0$$

$$\iff -5x = 0$$

$$\iff x = 0$$

$\mathcal{E}$ est l'axe des ordonnées privé du point $(0;-2)$.

3) Z est un imaginaire pur

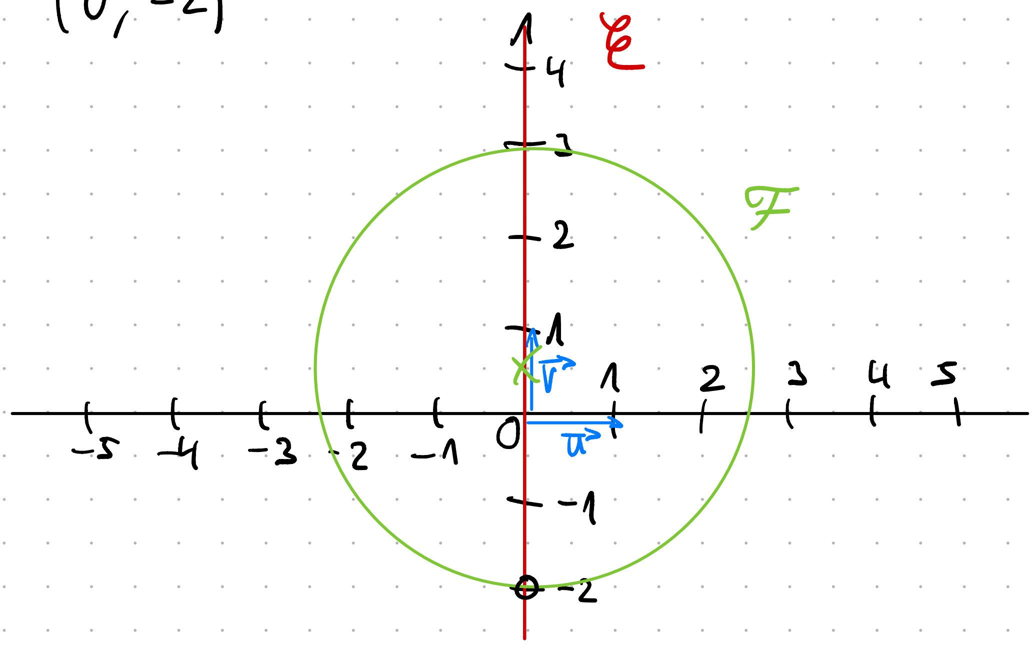
$$\iff Re(Z) = 0$$

$$\iff x^2+y^2-y-6 = 0$$

$$\iff (x-0)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 6 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\iff (x-0)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$\mathcal{F}$ est le cercle de centre $C\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{5}{2}$ privé du point $(0;-2)$



Exercice 44 (examen septembre 1997 nouveau régime)

M est le point d'affixe $z = x + iy$ avec *x*, *y* réels.

A tout point *M* d'affixe $z \neq -2$, on associe le point *M'* d'affixe $Z = -\frac{4i-\bar{z}}{\bar{z}+2}$.

1) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de *Z* en fonction de *x* et *y*.

2) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{F}$ des points *M* pour lesquels *Z* est un imaginaire pur.

1) $Z = -\frac{4i-\bar{z}}{\bar{z}+2}$

$$= \frac{-4i+(x-yi)}{(x-yi)+2}$$

$$= \frac{-4i-yi+x}{(x+2)-yi} \cdot \frac{x+2+yi}{(x+2)+yi}$$

$$= \frac{-4xi-8i+4y\cancel{-xyi}-2yi+y^2+x^2+2x\cancel{+xyi}}{(x+2)^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2+2x+y^2+4y}{(x+2)^2+y^2} \cdot \frac{-4x-8-2y}{(x+2)^2+y^2}\, i$$

$\mathrm{Re}(Z) = \frac{x^2+2x+y^2+4y}{(x+2)^2+y^2}$; $\mathrm{Im}(Z) = \frac{-4x-8-2y}{(x+2)^2+y^2}$

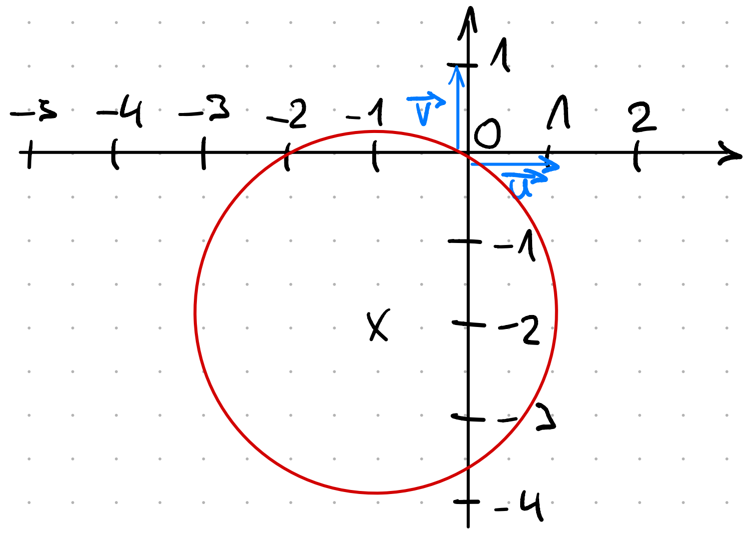
2) Z est un imaginaire pur

$\iff \mathrm{Re}(Z) = 0$

$\iff x^2+2x+y^2+4y = 0$

$\iff (x+1)^2+(y+2)^2 = 5$

$\mathscr{F}$ est le cercle de centre $(-1;-2)$ et de rayon $\sqrt{5}$ privé du point $(-2;0)$



Exercice 45

A tout point *M* d'affixe *z* non nulle, on associe le point *M'* d'affixe $z' = \frac{z-1-i}{z}$.

1) Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point *B'*, image du point *B* d'affixe *i*.
2) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ de tous les points *M* pour lesquels : $|z'| = 1$.
3) Pour $z = x + iy \neq 0$, écrire l'expression algébrique de z'.
4) Déterminer l'ensemble $\mathscr{A}$ des points *M* pour lesquels z' est un réel.
5) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points *M* pour lesquels z' est un imaginaire pur.

1) $z' = \frac{z-1-i}{z}$, $z \neq 0$

$$\frac{i-1-i}{i} = -\frac{1}{i}$$

$$= i$$

Donc $B'(i)$

2) $|z'| = 1 \iff \frac{|z-1-i|}{|z|} = 1$

$$\iff |z-1-i| = |z|$$

$$\iff |z-(1+i)| = |z-0|$$

$\mathscr{E}$ est la médiatrice de $[AO]$ avec $A(1+i)$ et O l'origine.

3) $z' = \frac{x+iy-1-i}{x+iy} \quad \frac{x-yi}{x-yi}$

$$= \frac{x^2 + \cancel{xyi} - x - ix - \cancel{xyi} + y^2 + yi - y}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2 - x + y^2 - y}{x^2+y^2} \cdot \frac{-x+y}{x^2+y^2} ;$$

$$Re(z) = \frac{x^2 - x + y^2 - y}{x^2+y^2} ; \quad Im(z) = \frac{-x+y}{x^2+y^2}$$

4) Z est un réel

$$\Leftrightarrow Im(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x+y=0$$

$$\Leftrightarrow y = x$$

$\mathscr{A}$ est la droite $d \equiv y = x$ privé de l'origine

5) z' est un imaginaire pur

$$\Leftrightarrow Im(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$\mathscr{F}$ est le cercle de centre $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ privé de l'origine.

Exercice 46

$\mathscr{E}$ est l'ensemble de tous les points M dont l'affixe z vérifie : $|iz + 3 - 2i| = |\bar{z} - 2 + i|$.

1) Déterminer cet ensemble par la méthode géométrique.

2) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{E}$ par la méthode analytique.

1) $|iz + 3 - 2i| = |\bar{z} - 2 + i| \Leftrightarrow |i|\,|z - 3i - 2| = |\overline{z - 2 + i}|$

$$\Longleftrightarrow |z-3i-2| = |z-2-i|$$

$$\Longleftrightarrow |z-(2+3i)| = |z-(2+i)|$$

$\mathcal{E}$ est la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(2+3i)$ et $B(2+i)$

2) Posons : $z = x+yi$, avec $x, y \in \mathbb{R}$

$$|iz+3-2i| = |\bar{z}-2+i| \Longleftrightarrow |i(x+yi)+3-2i| = |(x-yi)-2+i|$$

$$\Longleftrightarrow |xi-y+3-2i| = |x-2-yi+i|$$

$$\Longleftrightarrow |(3-y)+(x-2)i| = |(x-2)+(1-y)i|$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{(3-y)^2+(x-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(1-y)^2}$$

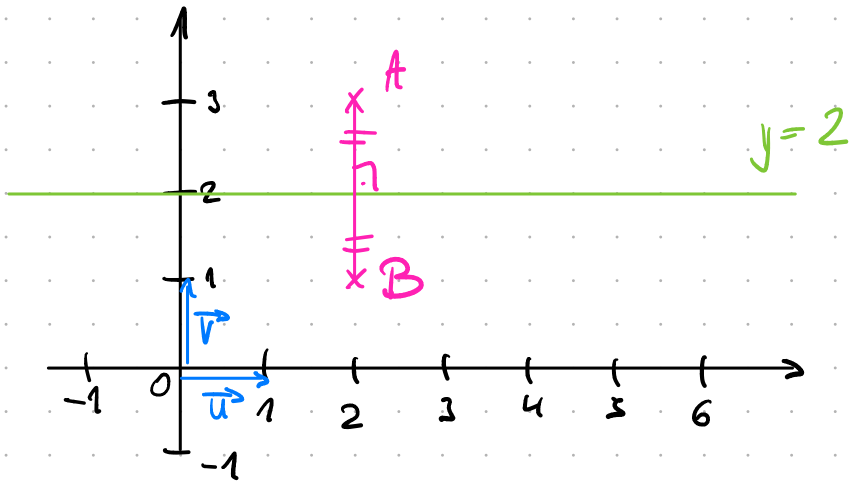
$$\Longleftrightarrow (3-y)^2 + \cancel{(x-2)^2} = \cancel{(x-2)^2} + (1-y)^2$$

$$\Longleftrightarrow 9-6y+\cancel{y^2} = 1-2y+\cancel{y^2}$$

$$\Longleftrightarrow -4y = -8$$

$$\Longleftrightarrow y = 2$$

$\mathcal{E}$ est la droite d'équation $y = 2$



Exercice 47

Par la méthode géométrique déterminer les ensembles suivants :

1) l'ensemble $\mathscr{E}$ de tous les points *M(z)* tels que : $|1-3i-z| \leq 5$.

2) l'ensemble $\mathscr{F}$ de tous les points *M(z)* tels que : $|1-iz| = |2+3i+\bar{z}|$.

3) l'ensemble $\mathscr{G}$ de tous les points *M(z)* tels que : $|-2-i\bar{z}| \leq |2-3i|$.

1) $|1-3i-z| \leq 5 \iff |(1-3i)-z| \leq 5$

$\mathscr{E}$ est le disque de centre $A(1-3i)$ et de rayon 5

2) $|1-iz| = |2+3i+\bar{z}| \iff |i|\,|-i-z| = \overline{|2+3i+\bar{z}|}$

$\iff |(0-i)-z| = |2-3i+z|$

$\iff |(0-i)-z| = |(-2+3i)-z|$

$\mathscr{F}$ est la médiatrice de $[AB]$ avec $A(-2+3i)$ et $B(-i)$

3) $|-2-i\bar{z}| \leq |2-3i| \iff |i|\,|2i-\bar{z}| \leq \sqrt{2^2+3^2}$

$\iff \overline{|2i-\bar{z}|} \leq \sqrt{13}$

$\iff |(-2i)-z| \leq \sqrt{13}$

$\mathscr{G}$ est le disque de centre $A(-2i)$ et de rayon $\sqrt{13}$.

Exercice 48

M est le point d'affixe $z = x + iy$ avec *x*, *y* réels.

A tout point *M* d'affixe $z \neq -2i$, on associe le point *M'* d'affixe $Z = \frac{z-2+i}{z+2i}$.

1) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de *Z* en fonction de *x* et *y*.
2) En déduire la nature de :
   a. l'ensemble $\mathscr{E}$ des points *M* pour lesquels *Z* est un réel.
   b. l'ensemble $\mathscr{F}$ des points *M* pour lesquels *Z* est un imaginaire pur éventuellement nul.
   c. Représenter ces deux ensembles.

1) $Z = \dfrac{z-2+i}{z+2i}$

$$= \frac{x+yi-2+i}{x+yi+2i} \cdot \frac{x-yi-2i}{x-(y+2)}$$

$$= \frac{x^2 \cancel{-xyi} - 2xi \cancel{+xyi} + y^2 + 2y - 2x + 2yi + 4i + xi + y + 2}{x^2 + (y+2)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+3y-2x+2}{x^2+(y+2)^2} + \frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}\, i$$

$$Re(Z) = \frac{x^2-2x+y^2+3y+2}{x^2+(y+2)^2} \;;\quad Im(Z) = \frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$$

2)

a. Z est un réel

$\Leftrightarrow Im(Z)=0$

$\Leftrightarrow -x+2y+4=0$

$\Leftrightarrow 2y = x-4$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$

$\mathcal{E}$ est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$ privé du point $(0;-2)$

b. Z est un imaginaire pur

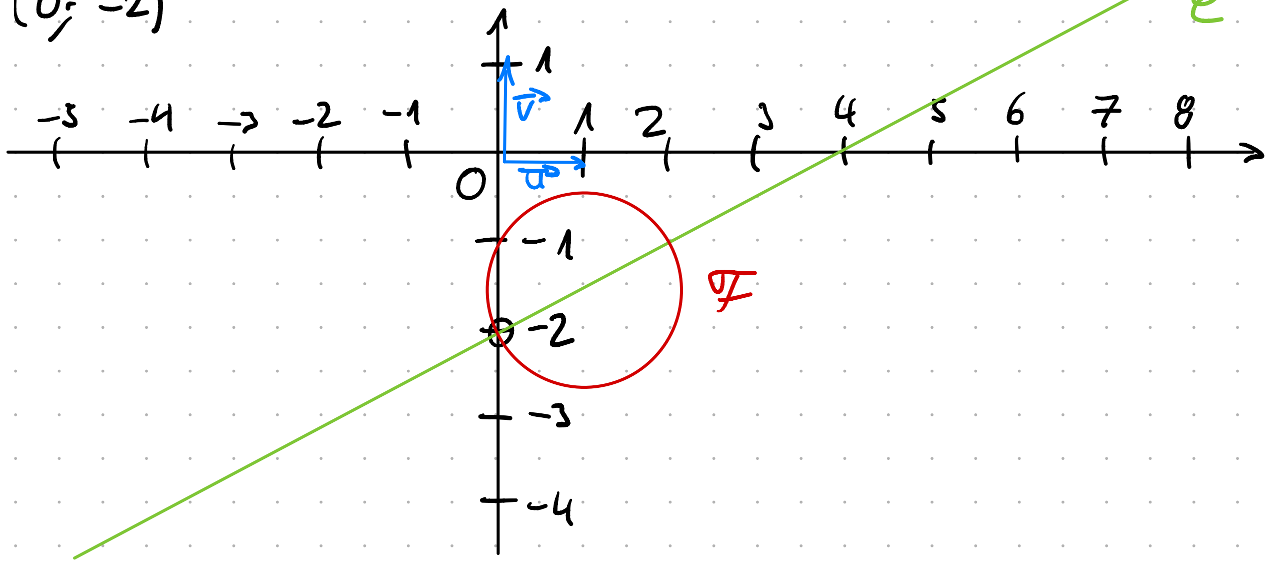
$\Leftrightarrow Re(Z)=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+3y+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + 2\cdot\frac{3}{2}y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

$\mathcal{F}$ est le cercle de centre $\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $(0;-2)$



Exercice 49

Soit l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M dont l'affixe z vérifie $|2iz-5i+2| = |2\bar{z}+4-8i|$.

Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ par la méthode géométrique.

$$|2iz-5i+2| = |2\bar{z}+4-8i|$$

$$\iff |i|\,|2z-5-2i| = \overline{|2\bar{z}+4-8i|}$$

$$\iff \cancel{|2|}\,\left|z-\tfrac{5}{2}-i\right| = \cancel{|2|}\,|z+2+4i|$$

$$\iff \left|z-\left(\tfrac{5}{2}+i\right)\right| = |z-(-2-4i)|$$

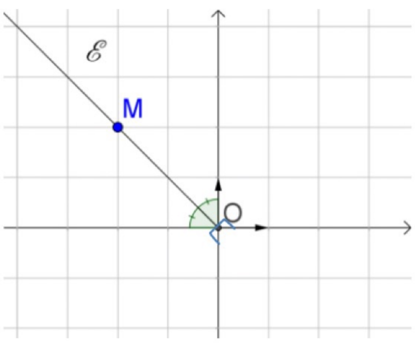
$\mathscr{F}$ est la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A\left(\frac{5}{2}+i\right)$ et $B(-2-4i)$

Exercice 50

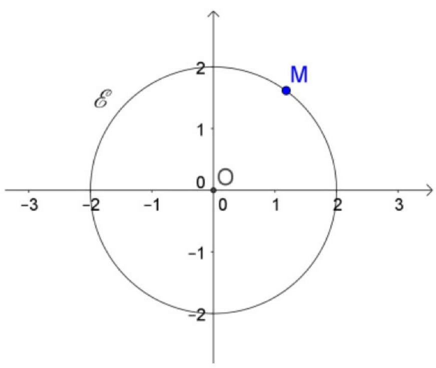
Dans chacun des cas suivants, on a représenté un ensemble $\mathscr{E}$ de points M du plan dont l'affixe a pour module r et pour argument θ.

Caractériser à l'aide de r ou/et de θ, ou des deux, cet ensemble $\mathscr{E}$.

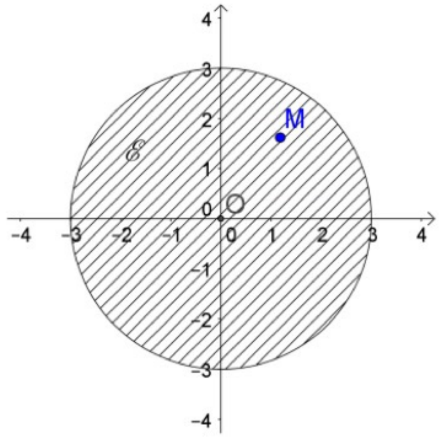
1) Figure 1 :



2) Figure 2 :

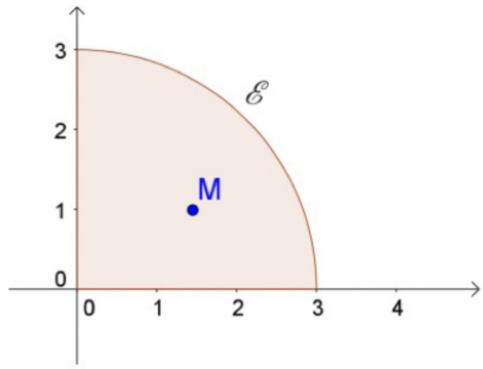


3) Figure 3 :



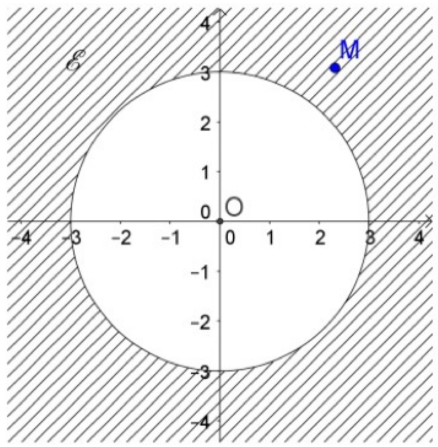
Les frontières sont comprises.

4) Figure 4 :



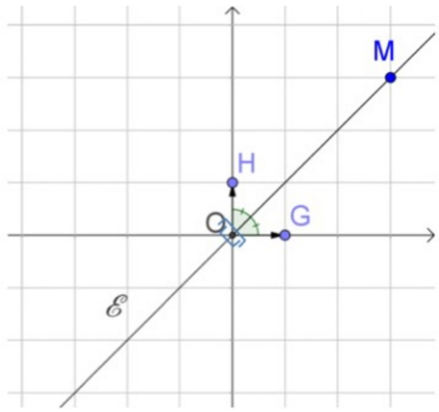
Les frontières sont comprises.

5) Figure 5 :



Les frontières sont comprises.

6) Figure 6 :



1) $\mathcal{E} = \left\{ M(z) \mid \arg(z) = \frac{3\pi}{4} \mod 2\pi \right\}$

2) $\mathcal{E} = \left\{ M(z) \mid r = 2 \right\}$

3) $\mathcal{E} = \left\{ M(z) \mid r \leq 3 \right\}$

4) $\mathcal{E} = \left\{ M(z) \mid r \leq 3 \text{ et } 0 \mod 2\pi \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} \mod 2\pi \right\}$

5) $\mathcal{E} = \left\{ M(z) \mid r \geq 3 \right\}$

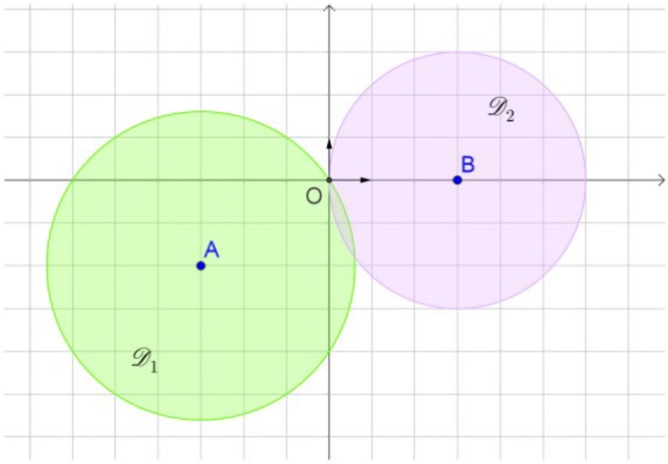
6) $\mathcal{E} = \left\{ M(z) \mid \arg(z) = \frac{\pi}{4} \mod \pi \right\}$

Exercice 51

1) Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$|z-i| = |\bar{z}-2-i| = |z-1+3i|.$$

2) Sur la figure ci-dessous, on a représenté les cercles de centres A et B passant à chaque fois par l'origine O du repère. On note $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les disques fermés correspondants.



a. Caractériser l'appartenance du point M au disque $\mathcal{D}_1$.

b. De manière analogue, caractériser l'appartenance du point M au disque $\mathcal{D}_2$.

c. Caractériser l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que M appartient au disque $\mathcal{D}_1$ et au disque $\mathcal{D}_2$.

1)

- $|z-i| = |\bar{z}-2-i| \iff |z-(i)| = \overline{|\bar{z}-2-i|}$

$$\iff |z-(i)| = |z-2+i|$$

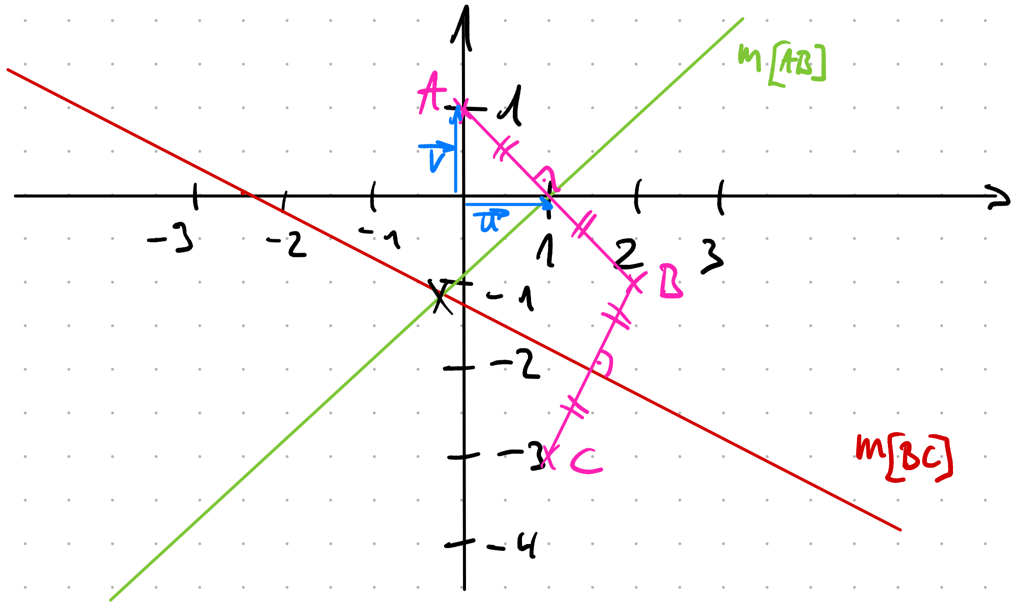
$$\iff |z-(i)| = |z-(2-i)|$$

Ce sont tous les points appartenant à la médiatrice $m_{[AB]}$ du segment $[AB]$ avec $A(i)$ et $B(2-i)$.

- $\overline{|\bar{z}-2-i|} = |z-1+3i| \iff |z-2+i| = |z-(1-3i)|$

$$\iff |z-(2-i)| = |z-(1-3i)|$$

Ce sont tous les points appartenant à la médiatrice $m_{[BC]}$ du segment $[BC]$ avec $B(2-i)$ et $C(1-3i)$.



D'où l'ensemble des points $M(z)$ tel que

$$|z-i| = |\bar{z}-2-i| = |z-1+3i|$$

est le point d'intersection des deux médiatrices $m_{[AB]}$ et $m_{[BC]}$

2)

a. $M(z) \in D_1 \iff MA \leq OA$

$$\iff |z - z_A| \leq |z_A|$$

$$\iff |z-(-3-2i)| \leq |-3-2i|$$

$$\iff |z+3+2i| \leq \sqrt{13}$$

b. $M(z) \in D_2 \iff MB \leq OB$

$$\iff |z - z_B| \leq |z_B|$$

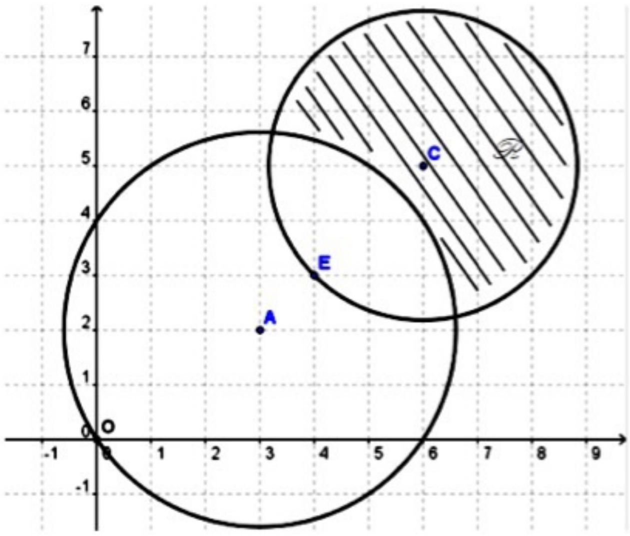
$$\iff |z-3| \leq |3|$$

$$\iff |z-3| \leq 3$$

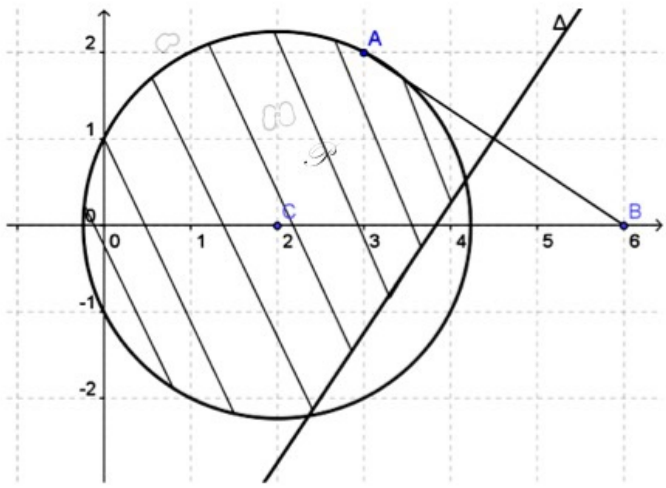
c. $M(z) \in D_1 \cap D_2 \iff |z+3+2i| \leq \sqrt{13}$ et $|z-3| \leq 3$

Exercice 52

1) Caractériser par une double condition sur son affixe z l'appartenance d'un point M à la région hachurée $\mathscr{R}$ frontières comprises.



2) Caractériser par deux conditions sur son affixe z l'appartenance d'un point M à la région $\mathscr{P}$ hachurée frontières comprises, sachant que Δ est la médiatrice du segment *[AB]*.



1) M appartient à $\mathscr{R}$ si M est sur le disque de centre C et de rayon CE et M se trouve à l'exterieur du disque de centre A et de rayon AO.

On a : $C(6+5i)$

$E(4+3i)$

$A(3+2i)$

Donc : $CE = |z_{\overrightarrow{CE}}|$ $= |z_E - z_C|$ $= |4+3i-6-5i|$ $= |-2-2i|$ $= 2\sqrt{2}$

$AO = |z_A|$ $= |3+2i|$ $= \sqrt{13}$

$M \in \mathcal{R} \iff |z-z_C| \leq 2\sqrt{2}$ et $|z-z_A| \geq \sqrt{13}$

2) M appartient à $\mathcal{D}$ si M est sur le disque de centre C et de rayon CA et M est plus proche de A que de B ($MA \leq MB$)

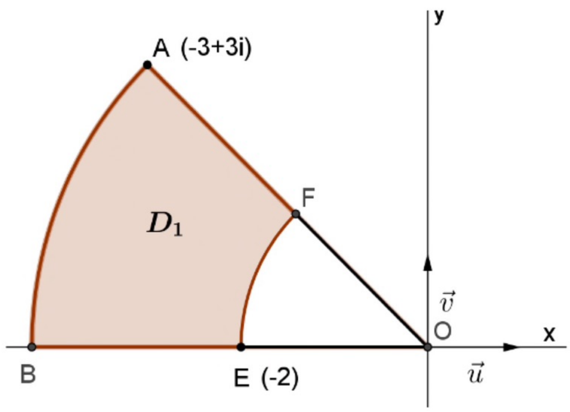
On a : $C(2)$; $A(3+2i)$; $B(6)$

Donc : $CA = |z_{\overrightarrow{CA}}|$ $= |z_A - z_C|$ $= |3+2i-2|$ $= |1-2i|$ $= \sqrt{5}$

$M \in \mathcal{D} \iff |z-z_C| \leq \sqrt{5}$ et $|z-z_A| \leq |z-z_B|$
$\iff |z-z_C| \leq \sqrt{5}$ et $|z-(3+2i)| \leq |z-6|$

Exercice 53

On a représenté le domaine D_1 (avec frontières comprises) de points M dont l'affixe z a pour module r et pour argument θ. Caractériser D_1 à l'aide de θ et r.



On a : $-3+3i = 3\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

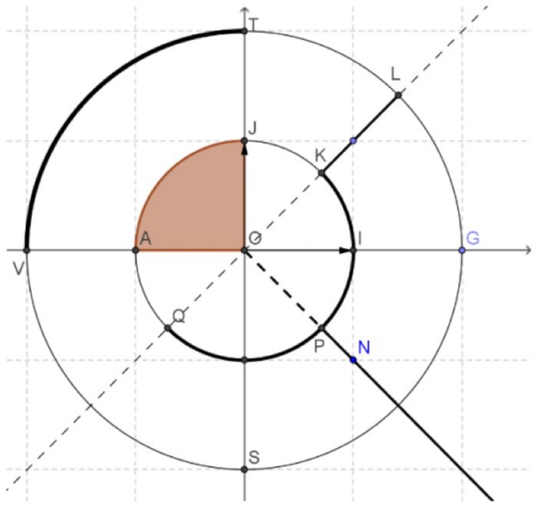
et $-2 = 2\,\text{cis}(\pi)$

D'où $D_1 = \left\{ M(z) \mid r \in \left[2 ; 3\sqrt{2}\right] \text{ et } \theta \in \left[\frac{3\pi}{4} \bmod 2\pi ; \pi \bmod 2\pi\right] \right\}$

Exercice 54

Caractériser à l'aide de Re(z) et/ou Im(z) ou bien à l'aide de arg(z) et/ou $|z|$ l'appartenance du point M(z) aux ensembles suivants :

1) M(z) appartient au cercle de centre O et passant par G ;
2) M(z) appartient au segment ouvert $]KL[$;
3) M(z) appartient à la demi-droite ouverte $]PN)$;
4) M(z) appartient au quart de cercle fermé $\widehat{TV}$;
5) M(z) appartient au quart de disque colorié bords exclus ;
6) M(z) appartient au demi-cercle ouvert $\widehat{QK}$.



1) $OG = 2$

$\mathcal{E} = \left\{ M(z) \mid |z| = 2 \right\}$

2) $\mathcal{E} = \left\{ M(z) \mid |z| \in]1;2[\text{ et } \arg(z) = \frac{\pi}{4} \bmod 2\pi \right\}$

3) $\mathcal{E} = \left\{ M(z) \mid |z| > 1 \text{ et } \arg(z) = -\frac{\pi}{4} \bmod 2\pi \right\}$

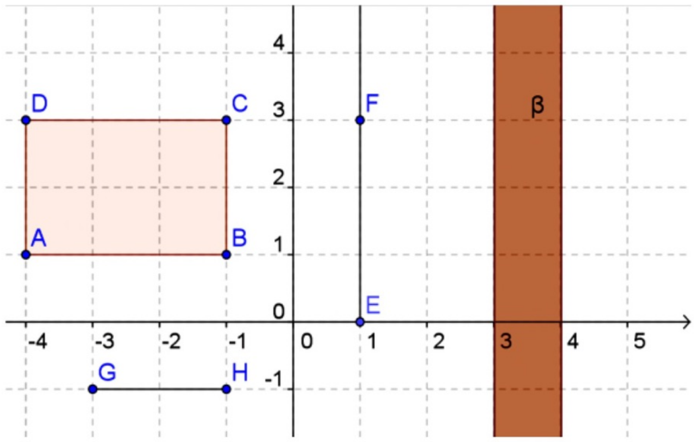
4) $\mathcal{E} = \left\{ M(z) \mid |z| = 2 \text{ et } \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi \leq \arg(z) \leq \pi \bmod 2\pi \right\}$

5) $\mathcal{E} = \left\{ M(z) \mid |z| < 1 \text{ et } \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi < \arg(z) < \pi \bmod 2\pi \right\}$

6) $\mathcal{E} = \left\{ M(z) \mid |z| = 1 \text{ et } -\frac{3\pi}{4} \bmod 2\pi < \arg(z) < \frac{\pi}{4} \bmod 2\pi \right\}$

Exercice 55

Caractériser à l'aide de Re(z) et/ou Im(z) ou bien à l'aide de arg(z) et/ou $|z|$ l'appartenance du point M(z) aux ensembles suivants :



1) M(z) appartient au segment ouvert $]GH[$;
2) M(z) appartient à la demi-droite ouverte $]EF)$;
3) M(z) appartient au rectangle fermé *ABCD ;*
4) M(z) appartient à la bande ouverte β.

1) $\mathcal{E} = \{ M(z) \mid -3 < Re(z) < -1 \text{ et } Im(z) = -1 \}$

2) $\mathcal{E} = \{ M(z) \mid Re(z) = 1 \text{ et } Im(z) > 0 \}$

3) $\mathcal{E} = \{ M(z) \mid -4 \leq Re(z) \leq -1 \text{ et } 1 \leq Im(z) \leq 3 \}$

4) $\mathcal{E} = \{ M(z) \mid 3 < Re(z) < 4 \}$

Exercice 56

Vrai ou faux ? Justifier la réponse :

1) Si $z = 2 + 2i$, alors le nombre complexe z^{2020} est réel.
2) Si $z = 3 + i\sqrt{3}$, alors pour tout entier naturel *n* non nul z^{3n} est un imaginaire pur.

1) $z^2 = (2+2i)^2$

$= -8i$

$z^4 = (2+2i)^4$

$= (-8i)^2$

$= -64$

$z^{2020} = (2+2i)^{2020}$

$= \underbrace{\left[\underbrace{(-64)^4}_{\in \mathbb{R}}\right]^{505}}_{\in \mathbb{R}}$

2) $z^3 = (3+i\sqrt{3})^3$

$= 18\sqrt{3}i - 18$

Donc z^3 n'est pas un imaginaire pur.

Faux, car ce n'est pas le cas pour $n = 1$.

Donc : Vrai !

Exercice 57

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) Soient les points A d'affixe $2 - 5i$ et B d'affixe $7 - 3i$.
   Affirmation 1 : le triangle OAB est rectangle et isocèle.
2) Soit Δ l'ensemble des points *M* d'affixe *z* telle que $|z - i| = |z + 2i|$.
   Affirmation 2 : Δ est une droite parallèle à l'axe des réels.
3) Soit $\mathrm{z} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

   Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4) Soit z un nombre complexe non nul.
   Affirmation 4 : Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z, alors $|z + i| = 1 + |z|$.
5) Soit z un nombre complexe non nul.
   Affirmation 5 : Si le module de z est égal à 1, alors $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel.
6) Soit *j* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.
   Affirmation 6 : $1 + j + j^2 = 0$.
7) Soit z un nombre complexe non nul.
   Affirmation 4 : Si θ est un argument de z, alors un argument de $-\frac{1-i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est $\frac{2\pi}{3} - \theta$.

1) $OA = |z_A|$
$= \sqrt{2^2 + 5^2}$
$= \sqrt{29}$

$OB = |z_B|$
$= \sqrt{7^2 + 3^2}$
$= \sqrt{58}$

$AB = |z_A - z_B|$
$= \sqrt{(2-7)^2 + (-5+3)^2}$
$= \sqrt{29}$

$\Rightarrow$ OAB est isocèle en A.

$OA^2 + AB^2 = \sqrt{29}^2 + \sqrt{29}^2 = 58$
$OB = \sqrt{58}^2 = 58$
$=$

Par la réciproque du théorème du Pythagore AOB est aussi rectangle en A.

$\Rightarrow$ Vrai !

2) Δ est la médiatrice du segment [AB] avec A(i) et

$B(-2i)$.

On a : $A, B \in (Oy)$

Donc $\Delta \perp (Oy) \iff \Delta \parallel (Ox)$

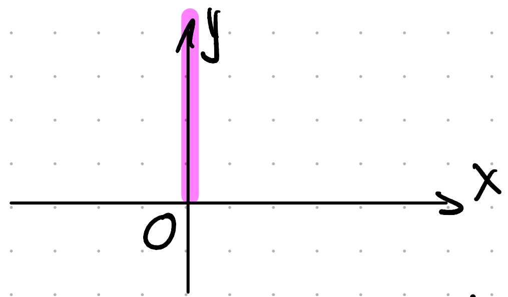
$\Rightarrow$ Vrai !

3) $z^3 = (3+i\sqrt{3})^3$

$= 18\sqrt{3}i - 18$

Donc z^3 n'est pas un imaginaire pur.

Faux, car ce n'est pas le cas pour $n=1$.

4) 

z est de la forme $z = ai$ avec $a \in \mathbb{R}_+$

$$|z+i| = |ai+i| = |(a+1)i| = a+1$$

$\Rightarrow$ Vrai !

$$1 + |z| = 1 + |ai| = a+1$$

5) Soit : $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, z non nul

$|z| = 1 \iff \sqrt{a^2+b^2} = 1$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = (a+bi)^2 + \frac{1}{(a+bi)^2}$$

$$= a^2 + 2abi - b^2 + \frac{1}{a^2+2abi-b^2} \cdot \frac{a^2-2abi-b^2}{a^2-2abi-b^2}$$

$$= (a^2-b^2) + 2abi + \frac{a^2-b^2-2abi}{(a^2-b^2)^2 + (2ab)^2}$$

$$= a^2-b^2 + 2abi + \frac{a^2-b^2-2abi}{(a^2-b^2)^2 \,) = 1}$$

$$= a^2 - b^2 + \cancel{2abi} + a^2 - b^2 - \cancel{2abi}$$

$$= \underbrace{\underbrace{2a^2}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{2b^2}_{\in \mathbb{R}}}_{\in \mathbb{R}}$$

$\Rightarrow$ Vrai !

6) $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$1 + j + j^2 = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}i} - \frac{1}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ Vrai !

7) $$\arg\left(-\frac{1-\sqrt{3}i}{\bar{z}}\right) = \arg\left(-1+\sqrt{3}i\right) - \arg(\bar{z})$$

$$= \arg\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \arg(z)$$

$$= \frac{2\pi}{3} + \theta$$

$\Rightarrow$ Faux.